## MÄÄRATUD INTEGRAALI ARVUTAMINE

### Newtoni – Leibnizi valem

Määratud integraali $\int_a^b f(x)dx$ arvutamiseks kasutatakse Newtoni –Leibnizi valemit

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

**Näide 1**

Leiame

$$\int_1^e \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1.$$

**Näide 2**

Leida integraal $\int_0^1 xdx$

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

**Näide 3**

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\, dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sin\frac{\pi}{4} - \sin 0 = \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

**Näide 4**

$$\int_{-2}^{3}\left(x^2 - 2x + 3\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + 3x\right)\Bigg|_{-2}^{3} = \frac{3^3}{3} - 3^2 + 3\cdot 3 - \left(\frac{(-2)^3}{3} - (-2)^2 + 3\cdot(-2)\right) = 9 - \left(-\frac{8}{3} - 10\right) =$$

$$= 9 + \frac{8}{3} + 10 = \frac{19\cdot 3 + 8}{3} = \frac{65}{3} = 21\frac{2}{3}$$

### Muutuja vahetus

Muutuja vahetuse valik sõltub integreeritavast funktsioonist ja need põhimõtted on määramata integraali korral läbi vaadatud.

Määratud integraali arvutamisel huvitab meid selle arvuline väärtus, mitte esialgse funktsiooni algfunktsioon. Seepärast ei minda määratud integraalis pärast muutuja vahetust enam tagasi vanale muutujale, vaid arvutatakse rajad uue muutuja jaoks.

Tehes määratud integraalis

$$\int_a^b f(x)dx$$

muutuja vahetuse $x = \varphi(t)$, leiame $dx = \varphi'(t)dt$, võrrandist $\varphi(t) = a$ uue muutuja jaoks alumise raja $t = \alpha$ ja võrrandist $\varphi(t) = b$ ülemise raja $t = \beta$. Siis

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[(\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

**Näide 5**

Leida integraal

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx.$$

Selels integraalis teeme muutuja vahetuse $t = 2x$, siis $dt = 2dx$. Määrame integraali uued rajad:

kui $= \frac{\pi}{2}$, siis $t = \pi$ ning kui $x = 0$, siis $t = 0$. Seda võib vormistada ka järgmiselt:

$$\begin{array}{c|c} x & t \\ \hline \frac{\pi}{2} & \pi \\ 0 & 0 \end{array}$$

Siis

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = \int_0^{\pi} \sin t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin t dt = \frac{1}{2}(-\cos t)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2}(1+1) = 1.$$

**Näide 6**

Leida integraal

$$\int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$$

Olgu $t = e^x$, siis $dt = e^x dx$. Määrame integraali uued rajad muutuja $t$ suhtes järgmise skeemi järgi:

$$\begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 1 & e. \\ 0 & 1 \end{array}$$

Seega

$$\int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}} = \int_1^e \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t\Big|_1^e = \arcsin 1 - \arcsin e = \frac{\pi}{2} - \arcsin e.$$

**Näide 7**

Arvutame $I = \int_0^2 \sqrt{8-x^2}dx$. Irratsionaalsusest vabanemiseks teeme muutuja vahetuse $x = 2\sqrt{2}\sin t$. Siis $dx = 2\sqrt{2}\cos t dt$ ja

$$\sqrt{8-x^2} = \sqrt{8-8\sin^2 t} = \sqrt{8\cos^2 t} = 2\sqrt{2}\cos t.$$

Arvutame rajad uue muutuja $t$ jaoks. Kui $x = 0$, siis $\sin t = 0$, millest $t = 0$. Kui $x = 2$, siis $2\sqrt{2}\sin t = 2$ ehk $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$, millest $t = \frac{\pi}{4}$. Seega

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sqrt{2}\cos t \cdot 2\sqrt{2}\cos t dt = 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt = \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2t)dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t d(2t) = \\ &= 4t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + 2\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi + 2. \end{aligned}$$

## Ositi integreerimine

Olgu $u(x)$ ja $v(x)$ lõigul $[a;b]$ diferentseeruvad funktsioonid. Sellisel juhul nende korrutise difrentsiaal

$$d(uv) = udv + vdu.$$

Integreerides viimast võrdust rajades $a$-st $b$-ni, saame

$$uv\Big|_a^b = \int_a^b udv + \int_a^b vdu,$$

millest

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Oleme saanud ositi integreerimise valemi määratud integraali arvutamiseks. Valemi kasutamisel on funktsiooni $u$ ja diferentsiaali $dv$ valiku põhimõtted samad, mis määramata integraali korral.

Näide 8 Leida integraal

$$\int_0^1 xe^x dx.$$

Võtame

$$u = x \quad dv = e^x dx, \quad siis \quad du = dx, \quad v = \int e^x dx = e^x.$$

Seega

$$\int_0^1 xe^x dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1\cdot e^1 - 0\cdot e^0 - e^x\Big|_0^1 = e - (e^1 - e^0) = 1.$$

Näide 9 Leida integraal $\int_1^e lnxdx$.

Valides siin $u = \ln x$ ja $dv = dx$, leiame $du = \frac{dx}{x}$ ja $v = x$ ning ositi integreerimise valemi põhjal

$$\int_1^e \ln x dx = x \ln x\Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{dx}{x} = e - x\Big|_1^e = e - (e - 1) = 1.$$