

MAJANDUSMATEMAATIKA

ELEMENDID

Gümnaasiumi laia ja kitsa matemaatika ainekava
valikkursuse õppematerjal

Ants Aasma, Kirsti Kislenko, Jüri Kurvits,
Ako Sauga, Riina Timmermann, Evald Übi

TALLINN 2013



See teos on litsentseeritud Creative Commons'i Autorile viitamine +
Mitteäriline eesmärk + Jagamine samadel tingimustel 3.0 Jurisdiktsiooniga
sidumata litsentsiga.

EESSÕNA

Käesoleva raamatu peamiseks eesmärgiks on pakkuda õpilastele õppematerjali gümnaasiumi matemaatika valikkursuse „Majandusmatemaatika elemendid“ edukaks läbimiseks. Õppematerjal on näidatud matemaatika rakendusvõimalusi majandus- ja finantsprobleemidest arusaamisel ning nende lahendamisel nii igapäevases tegevuses kui ka laiemalt. Antud õppevahendi kõige olulisemateks ülesanneteks on anda ülevaade majandusmaailma kirjeldavatest lihtsamatest mudelitest; õpetada kasutama infotehnoloogiat ja kujundada teadmisi ning oskusi avalike andmebaaside ning laenukalkulaatorite käsitlemiseks; kujundada õpilaste statistika-alast pädevust ja anda õpilastele eelteadmisi tulevaseks kutsevalikuks.

Raamat on mõeldud kasutamiseks nii kitsa kui ka laia matemaatika kursuse jaoks, kusjuures laia matemaatika teemad on eristatud kahekordse joonega lehekülje äärel. Viimased kaks peatükki on mõeldud lisamaterjalina. Ülesannete raskusastmed on õpikus märgistatud vastavalt tärnidega (lihtsamast keerulisemaks minekul suureneb ülesandele märgitud tärnide arv). Ülesandeid saab kasutada nii auditoorseks kui ka koduseks lahendamiseks; samuti lahendamiseks nii paberipliiatsiga kui ka arvutiga. Õpiku lõpus on seletav sõnaraamat, mida saab kasutada ka indeksina. Lisaks on loodud e-kursus õpikeskkonnas Moodle, kus asuvad interaktiivsed demod, valikvastustega testid ja viited internetis asuvatele lisamaterjalidele.

Õppevahend valmis koostööna sisulist ja didaktilist kompetentsi omavate töögrupi liikmete vahel. Töögruppi kuulusid Ants Aasma, Kirsti Kislenko, Jüri Kurvits, Marina Latõnina, Avo Org, Ako Sauga, Riina Timmermann ja Evald Übi. Raamatu erinevate peatükkide autorid on A. Aasma, K. Kislenko, J. Kurvits, A. Sauga, R. Timmermann ja E. Übi. Materjalide paigutamise ja Moodlesse tegeles A. Sauga. Antud õppevahendi keelelise toimetamise ning majandusterminoloogia korrigeerimise ja ühtlustamisega tegeles A. Org. Raamatu peatükkide kirjutamisel on kasutatud meie töögrupi liikmete A. Aasma, A. Sauga ja E. Übi varem ilmunud õppematerjale, mida on kasutatud Tallinna Tehnikaülikooli ja Rahvusvahelise Ülikooli Audentes majandusteaduskondade bakalaureuseõppe majandusmatemaatika kursustel:

A. Aasma, Majandusmatemaatika põhimõisteid ja ülesandeid. Tallinn, TTÜ Kirjastus, 2004.

A. Aasma, H. Kallam, A. Levin, Majandusmatemaatika alused. Tallinn, Kirjastus „Ilo“, 2005.

A. Sauga, Majandusmatemaatika I, II. <http://www.sauga.pri.ee>

E. Übi, Lineaarne planeerimine ja selle rakendused. Tallinn, Kirjastus „Külim“, 2007.

Finantsmatemaatika peatüki kirjutamisel on A. Aasma kasutanud aastatel 2002-2004 Tallinna Ülikoolis õpetatud valikkursuse „Finantsmatemaatika“ õppematerjale. Kasulikke soovitusi mõnede peatükkide vormistamise kohta andis M. Latõnina; samuti koostas ta *PowerPoint*-i slaide mõnede teemade kohta.

Interaktiivsete demode loomisel on kasutatud Wolfram CDF (*Computable Document Format*) tehnoloogiat¹, programme *Geogebra*² ja *Adobe Flash*³. Õpikus olevad graafikud ja diagrammid on tehtud programmidega *Wolfram Mathematica* ja *MS Excel*, ekraanivideod programmiga *Wink*⁴.

Töögrupp avaldab siirast tänu kõikidele õpetajatele ja koolidele, kes osalesid õppematerjalide piloteerimise protsessis: Kristel Eik ja Riina Timmermann Gustav Adolfi Gümnaasiumist, Kelly Erin-Uussaar Leisi Keskkoolist, Sirje Sild Nõo Realgümnaasiumist, Daire Krabi Paide Gümnaasiumist, Siiri Sussi Rapla Vesiroosi Gümnaasiumist, Villu Kopli Tallinna Tehnikagümnaasiumist ja Marika Anissimov Viljandi Gümnaasiumist. Samuti avaldame südamlikku tänu eespool nimetatud koolide õpilastele, kes esimesena selle õppekomplekti järgi õppisid ja kelle tagasiside aitas meil õppematerjali paremaks muuta.

Meie eriline tänu kuulub retsensentidele Janika Kaljulale ja Indrek Zolkile kasulike ning asjatundlike märkuste eest. Veel väärivad meie tänu Tallinna Ülikooli informaatika eriala üliõpilased, kes suvepraktika raames lõid meie töögrupi liikmete K. Kislenko ja J. Kurvitsa juhendamisel erinevaid veebikalkulaatoreid.

Õppematerjali koostamine sai võimalikuks tänu edukale koostööle Katrin Saartiga Eesti Teadusagentuurist. Õppematerjal on valminud Eesti Teadusagentuuri programm TeaMe raames ning rahastatud Euroopa Sotsiaalfondist. TeaMe on teadust ja tehnoloogiat populariseeriv programm, mille üheks eesmärgiks on uute loodus-, täppis- ja tehnikateaduste valdkonna õppematerjalide väljatöötamine üldhariduskoolile. Lisainfo: www.etag.ee/teame.

Tallinnas, 2013

Autorite nimel

Kirsti Kislenko

¹ Vajalik vabavaraline Wolfram CDF Player <http://www.wolfram.com/cdf-player/>

² <http://www.geogebra.org/cms/et/>

³ Vajalik vabavaraline Adobe Flash Player <http://get.adobe.com/flashplayer/>

⁴ <http://www.debugmode.com/wink/>

Õpikus kasutatud märgistused

Eriti oluline definitsioon või valem.

Algab näide.

Tähistab näite lõppu.



Ülesanded.

* Tähistab keerulisemat ülesannet.

** Tähistab veel keerulisemat ülesannet.



Ülesanne on mõeldud lahendamiseks arvuti abil.



Ülesannete vastused.



Kirjandust lugemiseks.



E-õppekeskkonnas Moodle asub test või interaktiivne demo.

Kui selline joon on lehekülje paremas ääres, siis vastav materjal on mõeldud ainult laia matemaatika baasil toimuva valikkursuse jaoks.

Sisukord

Sissejuhatus	9
1. PROTSENTARVUTUS MAJANDUSES	1-1
<i>Ako Sauga, Riina Timmermann</i>	
Sissejuhatus	1-1
1.1. Protsentülesannete põhitüübid	1-1
Ülesanded	1-6
1.2. Protsentuaalne kasvamine ja kahanemine	1-8
Ülesanded	1-10
1.3. Hinnad, palgad, maksud	1-12
Ülesannete vastused.....	1-20
2. FINANTSMATEMAATIKA ELEMENDID	2-1
<i>Ants Aasma, Jüri Kurvits</i>	
Sissejuhatus	2-1
2.1. Olulisimad printsiibid finantsmatemaatikas	2-2
2.2. Liht- ja liitintressid	2-3
2.2.1. Lihtintresside arvutamise valem, tähtpäevaväärtus	2-4
2.2.2. Liitintresside arvutamise valem, tähtpäevaväärtus	2-5
2.2.3. Liht- ja liitintresside arvutamine mittetäisarvuliste ajaperioodide puhul ning finantstehingu ajaline kestus päevades	2-12
2.2.4. Tehingu põhisumma, intressimäär ja tehingu kestuse arvutamine	2-17
2.3. Raha nüüdisväärtus, maksete asendamine ekvivalentsete maksetega	2-25
2.3.1. Raha nüüdisväärtus.....	2-25
2.3.2. Erinevatel aegadel tehtud investeeringute võrdlemine, maksete asendamine ekvivalentsete maksetega	2-28
2.3.3. Völakirjad ja diskonteerimine	2-34
2.3.4. Inflatsioon.....	2-39

Ülesanded	2-43
2.4. Annuiteedid	2-48
2.4.1. Lihtne tava- ja avanssannuiteet, nende tulevikuväärtused ja nüüdisväärtused.....	2-49
2.4.2. Annuiteedi osamakse suuruse, tähtaja ja intressimäära arvutamine.....	2-58
Ülesanded	2-65
2.5. Laenud, investeerimine ja säästmine	2-68
2.5.1. Laenu kustutamine võrdsete osamaksetega.....	2-68
2.5.2. Liisingud.....	2-75
2.5.3. Krediitkaardid, kiiralaenud.....	2-76
2.5.4. Erinevate laenude võrdlemine	2-78
2.5.5. Hoiused, säästmine, investeerimine.....	2-85
Ülesanded	2-88
Ülesannete vastused.....	2-95
3. MAJANDUSSTATISTIKA.....	3-1
<i>Kirsti Kislenko, Ako Sauga</i>	
Sissejuhatus	3-1
3.1. Alusindeks ja kasvutempo	3-2
Ülesanded	3-12
3.2. Keskmine palk	3-13
Ülesanded	3-18
3.3. Tarbijahinnaindeks	3-18
Ülesanded	3-23
Ülesannete vastused.....	3-24
4. MAJANDUSES KASUTATAVAID FUNKTSIOONE.....	4-1
<i>Ants Aasma, Riina Timmermann</i>	
Sissejuhatus	4-1
4.1. Funktsiooni mõiste, selle esitusviisid.....	4-1

Ülesanded	4-4
4.2. Nõudlus- ja pakkumisfunktsioonid, turutasakaal	4-5
Ülesanded	4-15
4.3. Kulu- tulu- ja kasumifunktsioon, tasuvuspunkt ning eelarvekitsendus.....	4-17
4.3.1. Kogukulu ja keskmine kulu.....	4-17
4.3.2. Eelarvekitsendus.....	4-21
4.3.3. Kogutulu ja keskmine tulu.....	4-23
4.3.4. Kasum, tasuvuspunkt.....	4-24
4.3.5. Kasumifunktsioon lineaarse nõudlus- ja kulufunktsiooni korral.....	4-26
Ülesanded	4-28
Ülesannete vastused.....	4-32
5. OPTIMEERIMISÜLESANDED MAJANDUSES	5-1
<i>Ants Aasma</i>	
Sissejuhatus	5-1
5.1. Funktsiooni maksimumi ja miinimumi leidmine tuletise abil.....	5-1
5.2. Kulu, tulu ja kasumi optimeerimine	5-7
Ülesanded	5-14
5.3. Funktsiooni tuletise majanduslik tähendus, marginaalsuurused.....	5-19
Ülesanded	5-27
5.4. Optimeerimine marginaalsuuruste abil.....	5-30
5.4.1. Kasumi maksimeerimise kuldreegel.....	5-30
5.4.2. Seos marginaalsuuruste ja keskmiste suuruste vahel	5-34
5.4.3. Täieliku konkurentsi tingimustes tegutseva firma pakkumisfunktsioon.....	5-37
Ülesanded	5-40
Ülesannete vastused.....	5-43

6. LINEAARNE PLANEERIMINE	6-1
<i>Kirsti Kislenko, Evald Übi</i>	
Sissejuhatus	6-1
6.1. Näiteid LP ülesannete koostamise kohta	6-1
6.2. LP ülesannete lahendamine	6-7
Ülesannete vastused.....	6-18
7. LISATEEMA: MAJANDUSNÄHTUSTE MODELLEERIMINE	7-1
<i>Ako Sauga</i>	
Sissejuhatus	7-1
7.1. Regressioonanalüüs	7-1
Ülesanded	7-7
7.2. Mittelineaarsed mudelid	7-8
7.2.1. Eksponentsiaalne mudel	7-8
7.2.2. Logaritmiline mudel	7-12
Ülesanded	7-14
Ülesannete vastused.....	7-15
8. LISATEEMA: OTSUSTUSTEOORIA ELEMENDID	8-1
<i>Ako Sauga</i>	
Sissejuhatus	8-1
8.1. Otsustusteooria põhimõisted	8-2
8.2. Otsustamine täieliku määramatuse korral.....	8-4
8.3. Tõenäosuste kasutamine otsustamisel: oodatav väärtus	8-7
8.4. Tundlikkuse analüüs	8-10
8.5. Otsustamise puu.....	8-12
Ülesanded	8-17
Ülesannete vastused.....	8-20
Seletav sõnaraamat	S-1

Sissejuhatus

Matemaatika ei teeni üksnes iseene huve. Inimese täisväärtuslik areng ja toimetulek kaasaegses ühiskonnas ei ole mõeldav loogilise mõtlemise kultuurita. Oskus olukordi analüüsida, jõuda antud faktidest loogiliste arutluste kaudu järeldusteni, eristada olulist ebaolulisest, tõestatud mittetõestatud, oskus järjestada, klassifitseerida, püstitada hüpoteese, neid tõestada või ümber lükata, oskus kasutada analoogiaid – kõike seda ja veel palju muud omandab inimene eeskätt matemaatikaga tegeldes. Osa matemaatika tulemustest ja keelest on sedavõrd juurdunud igapäevaellu, et neid valdamata on inimesel mõeldamatu ühiskonnas toime tulla.

Matemaatika loob eelduse õpilase loogilise mõtlemise ja intuitsiooni arenguks, on teaduse, majanduse (ka rahanduse ja äri) ja tehnoloogia keeleks, arendab loogilist mõtlemist ja intuitsiooni ning on aluseks ja vahendiks kõikide loodusainete õppimisele ning ainetevahelise lõimingu (integratsiooni) loomisele. Seoses üleminekuga turumajandusele on käesoleval ajal muutunud aktuaalseks mitmesuguste majandusküsimuste valgustamine ka üldhariduskoolis. Arvestades matemaatika õpetamise eesmärke ning praegust üleminekuperioodi Eesti majanduses, on arusaadav finantsmatemaatika küsimuste õpetamise vajadus üldhariduskoolis. See aitab õpilastel paremini orienteeruda ja toime tulla igapäevaelus. Oluline koht on rahalistel väärtustel ja suhetel. Igal aastal muutuvad seadusandlus, hinnad, maksud ja palgad, neid muutusi peaks kajastama ka õpilastele. Lisaks on vaja kooli lõpetaval inimesel teada, mida tähendavad mõisted bilanss, intress, veksell, valuuta, väärtpaber, brutopalk, netopalk, ostuhind, müügihind, kasu ja kahju, hoius, töötuskindlustusmaks, pensionikindlustus, liitprotsent ja lihtprotsent jne.

Ülalkirjeldatud eesmärke ja ülesandeid on antud õppevahendi autorid ka püüdnud õppematerjalide koostamisel silmas pidada ja arvestada.