2. FINANTSMATEMAATIKA ELEMENDID

Ants Aasma, Jüri Kurvits

Sissejuhatus

Tänapäeval pole vist vaja pikalt selgitada, kui suurt tähtsust omab raha ja kõik sellega seonduv. Paljud teie seast on juba käinud tööl ja saanud töö eest ka tasu. Seoses sellega on tekkinud kindlasti küsimus, kuidas teenitud raha kõige otstarbekamalt kasutada. Ülikooli õppima asumise korral tuleb paljudel teist võtta õppelaenu ning siis on oluline, kuidas erinevate pakkumiste seast valida välja enda jaoks parim variant. Kaugemas tulevikus tuleb aga nii mõnelgi teie seast kokku puutuda veel mitmesuguste laenude ning liisingutega. Kindlasti seisavad paljud tulevikus otsustuste ees, kuidas valida erinevate eluasemelaenu või autoliisingu pakkumiste seast parim. Kui saate tulevikus piisavalt hästi tasustatud töökoha, siis võivad tekkida raha ülejäägid, mida pole just otstarbekas igapäevaseks tarbimiseks ära kulutada. Tekib probleem, kuidas ülejäävat raha kõige kasulikumal viisil säästa või investeerida: kas hoida oma raha tavalisel arvelduskontol, kasutada tähtajalise hoiustamise võimalust, paigutada raha aktsiatesse või muudesse väärtpaberitesse või hoopiski investeerida kinnisvarasse, väärismetallidesse, kunstiteostesse. Vaatleme mõningaid igapäevaelus võimalikke probleeme.

Oletame, et noor perekond Pukspuu soovib kodu renoveerimiseks võtta laenu 20 000 eurot. Selleks läheb pereisa panka, kus talle pakutakse laenu kustutamiseks kahte erinevat tagasimaksete graafikut. Esimese graafiku järgi on iga kuu lõpus tehtava osamakse suurus 230 eurot, teise järgi 250 eurot ning intressimäär on mõlema variandi korral 12% võlajäägilt. Millise variandi peaks perekond Pukspuu valima? Kirjeldatud situatsiooni analüüsime näites 2.4.9 ja märkuses 2.4.1.

Üliõpilane Roobert soovib osta 300 eurot maksva teleri, kuid vajab selleks laenu tähtajaga 1 aasta. Uurides laenuvõimalusi, leiab ta kolm varianti: SMS-laen kiirlaenufirmalt, krediitkaart ning järelmaks. Milline pakutud võimalustest on soodsaim? Esitatud probleemile otsime lahendust näites 2.5.9 ja märkustes 2.5.2 ja 2.5.3.

Manivald kaalub, kas minna pensionile 60 või 65 aastaselt. Kui ta valib esimese variandi, siis vähendatakse tema igakuist pensioni iga varem pensionile mindud kuu kohta 0,4%. Kuidas otsustada, milline pakutavatest variantidest on Manivaldile kasulikum? Kirjeldatud küsimusele otsime vastust näites 2.4.7.

Raha parimal viisil kasutamise ja paigutamisega seotud küsimusi hakkamegi järgnevalt põhjalikumalt uurima. Selleks on aga vaja vähemalt elementaarsel tasemel tunda raha toimemehhanisme, mida uurib finantsmatemaatika, mille põhimõisteid ja omadusi me järgnevalt püüame selgitada.

2.1. Olulisimad printsiibid finantsmatemaatikas

Alustuseks kirjeldame kahte kõige olulisemat printsiipi finantsmatemaatikas.

1. Sama nominaal- ehk nimiväärtusega raha reaalne väärtus ehk ostujõud on erinevatel ajamomentidel erinev. Kõik on ilmselt kuulnud väljendit „aeg on raha". Nimetatud printsiibi esitas väidetavalt esmakordselt hispaanlane Martin de Azpilcueta (1491-1586), tuntud ka kui Doktor Navarrus. Tuleb nõustuda, et see väljend esitab rahvakeeles tõepoolest raha ühte väga olulist omadust. Kõikides finantstehingutes sõltub raha väärtus ajast. Võib öelda, et finantsmatemaatikas väljaspool aega ei eksisteeri ka raha. Alati võime tõdeda, et näiteks raha nimiväärtusega 100 eurot on käesoleval hetkel suurema reaalse väärtusega, kui mistahes ajamomendil hiljem. Miks? Vähemalt kahel põhjusel. Esiteks peaaegu alati (välja arvatud mõnede haruldaste eranditega teatavat tüüpi majanduslanguste korral) eksisteerib ühiskonnas üldine hinnatõus ehk inflatsioon, st tulevikus saab 100 euro eest osta vähem kaupu või teenuseid kui käesoleval hetkel. Teiseks, omades 100 eurot antud hetkel, võib seda raha mitmesugusel viisil investeerida (näiteks paigutada hoiuarvele või tähtajalisele hoiusele või osta aktsiaid jne) ning teenida sel viisil täiendavat tulu.

2. Rahalistes tehingutes kehtib rahalise ehk finantsilise ekvivalentsuse printsiip. See tähendab, et rahalistes lepingutes peaksid erinevate lepinguosaliste kohustused olema finantsiliselt ekvivalentsed ehk samaväärsed.

Vaatleme selle printsiibi selgitamiseks ühte väga olulist finantstehingut, nimelt laenu.

Laen (*loan*) ehk krediit on võlgu võetud raha (või ka muu vara), mille laenu saaja (ehk võlgnik) peab kokkulepitud tingimustel ja tähtajal laenu andjale (ehk võlausaldajale) koos teatava lisasummaga tagasi maksma. Nimetatud lisasummat nimetatakse intressiks.

Intress (*interest*) ehk kasvik on tasu laenatud raha või muu vara kasutamise eest laenuperioodi jooksul. Intressi suurust väljendatakse protsentides laenatud rahasummast teatava ajavahemiku kohta. Tavaliselt on ajavahemikuks ehk intresside arvestamise perioodiks üks aasta.

Laenu intressi suurust määravat protsenti nimetatakse laenu **intressimääraks** (*interest rate*) ehk **laenuprotsendiks.** Antud juhul laenu summa (võlgnikule antud raha) laenu saamise hetkel on rahaliselt ekvivalentne laenu andjale tagasi makstud kogusummaga (laenu nimiväärtus + intress) laenutähtaja lõpul.

Eeltoodu selgitab ka esimest printsiipi, mille kohaselt sama nimiväärtusega raha reaalne väärtus erinevatel ajamomentidel on erinev.

Näide 2.1.1. Kaupo andis Jürgenile üheks aastaks laenu 1000 eurot intressimääraga 10% aasta kohta. Kui suure summa pidi Jürgen Kaupole ühe aasta pärast tagasi maksma?

Lahendus.

Kuna 10% 1000-st on $0{,}1 \cdot 1000 = 100$, siis intress laenatud summalt on 100 eurot.

Vastus: aasta pärast peab Jürgen Kaupole tagasi maksma laenu põhisumma 1000 eurot koos intressiga 100 eurot ehk kokku 1100 eurot. #

Näites 2.1.1 laenu andja ehk Kaupo poolt antud laen 1000 eurot on finantsiliselt ekvivalentne Jürgeni poolt aasta hiljem Kaupole tagasi makstud 1100 euroga. Järelikult antud tehingus on tehingu osaliste Kaupo (laenuandja) ja Jürgeni (laenusaaja) kohustused rahaliselt ekvivalentsed.

Märkus 2.1.1. Finantsilise ekvivalentsuse printsiip on mõnes mõttes siiski ka suhteline või hinnanguline. Nimelt, finantsilise ekvivalentsuse määrab turul kehtiv või lepinguosaliste vahel kokkulepitud intressimäär, mis võib ka sama tüüpi tehingute korral olla erinevates pankades või erinevate lepinguosaliste puhul erinev.

Märgime, et sarnaselt näitega 2.1.1 kasutatakse rahalise ekvivalentsuse printsiipi kõikides finantstehingutes.

2.2. Liht- ja liitintressid

Rahanduses kasutatakse peamiselt kahte erinevat intresside arvutamise meetodit: **lihtintressi** (*simple interest*) ja **liitintressi** (*compound interest*). Nende meetodite peamine erinevus on, et lihtintressi puhul on tehingu (näiteks laenu, investeeringu) põhisumma kogu tehingu perioodi jooksul muutumatu, liitintressi korral aga lisandub intress tehingu põhisummale kindlate ajavahemike järel. Kõigepealt uurime lihtintressi. Lihtintresse kasutatakse lühiajaliste, peamiselt alla aasta kestvate tehingute korral.

2.2.1. Lihtintresside arvutamise valem, tähtpäevaväärtus

Lihtintressi arvutamiseks kasutatakse valemit

Intress = tehingu nimiväärtus × intressimäär × aeg

ehk sümbolites

$$I = P \cdot r \cdot t\,, \tag{2.2.1}$$

kus

P on intressi kandva finantstehingu põhisumma (*principal*),

r intressimäär ühe aasta kohta ehk aastaintressimäär (*annual / yearly rate of interest*),

t finantstehingu kestus ehk periood aastates (*time period in years*),

I teenitav intress (*amount of interest earned*).

Põhimõtteliselt võib intresside arvestamise perioodiks olla ühe aasta asemel ka mingi muu ajavahemik, näiteks pool aastat, kolm kuud ehk kvartal, üks kuu jne. Kuid enamasti kasutatakse intresside arvestamise perioodina siiski ühte aastat. Kui edaspidi pole intressimäära puhul ajaperioodi märgitud, siis loeme vaikimisi, et *r* ehk intressimäära väärtus on antud ühe aasta kohta.

Finantstehingu tähtpäevaväärtus (*maturity value*) *S* = tehingu põhisumma *P* + intress *I*

ehk

$$S = P + I \tag{2.2.2}$$

Kasutades valemit (2.2.1), saab valemi (2.2.2) ümber kirjutada kujul

$$S = P + P \cdot r \cdot t$$

ehk

$$S = P \cdot (1 + r \cdot t). \tag{2.2.3}$$

Näide 2.2.1. Leida investeeringu 1000 eurot intress ja tähtpäevaväärtus, kui intressimäär on 10% ja kestus 2 aastat.

Lahendus.

Kuna P = 1000, $r = 0{,}1$ ja $t = 2$, siis valemite (2.2.1) ja (2.2.2) põhjal vastavalt

$$I = 1000 \cdot 0{,}1 \cdot 2 = 200 \text{ eurot}$$

ja

$$S = 1000 + 200 = 1200 \text{ eurot.}$$

Valemi (2.2.2) asemel oleks saanud kasutada ka valemit (2.2.3):

$$S = 1000 \cdot (1 + 0{,}1 \cdot 2) = 1200 \text{ eurot.}$$

Näide 2.2.2. Leida

a) investeeringu tähtpäevaväärtus *S*, kui põhisumma on 5000 eurot ja intress 300 eurot;

b) intress *I*, kui investeeringu põhisumma on 1200 eurot ja tähtpäevaväärtus 1620 eurot;

c) investeeringu põhisumma *P*, kui tähtpäevaväärtus on 2300 eurot ja intress 400 eurot.

Lahendus.

a) Kuna $P = 5000$ ja $I = 300$, siis

$$S = P + I = 5000 + 300 = 5300 \text{ eurot.}$$

b) Siin $P = 1200$ ja $S = 1620$; seega

$$1620 = 1200 + I,$$

$$I = 1620 - 1200 = 420 \text{ eurot.}$$

c) Siin $S = 2300$ ja $I = 400$; seega

$$2300 = P + 400,$$

$$P = 2300 - 400 = 1900 \text{ eurot. \#}$$

2.2.2. Liitintresside arvutamise valem, tähtpäevaväärtus

Liitintresside puhul ei maksta intresse arvestusperioodi lõpul välja, vaid need lisatakse lähtesummale. Järgneval perioodil on intresse kandvaks summaks juba lähtesumma koos eelmise perioodi intressiga.

Intressi lisamist intresside arvestamise perioodi algul olevale summale nimetame edaspidi **kapitalisatsiooniks** (*compounding* või *conversion*), ajaperioodi, mille lõpus toimub kapitalisatsioon, nimetame **kapitalisatsiooniperioodiks** (*compounding period*). Liitintresse kasutatakse peamiselt keskmise kestusega ja pikaajalistes tehingutes.

Seega liitintresside arvestamine toimub muutuva baasiga. Kontol olev summa kasvab kiirenevalt. Näiteks, olgu arvelduskontole pandud lähtesumma 1000 eurot, mis teenib intressi liitintresside reegli järgi 10% aastas. Esimese aasta lõpuks teenib see summa intressi $0{,}1 \cdot 1000 = 100$ eurot, mis lisatakse lähtesummale. Järelikult teise arveldusperioodi ehk 2. aasta algul on intressi teenivaks summaks 1000 + 100 = 1100 eurot. Nüüd teise aasta lõpuks on 1100 eurot teeninud intressi $0{,}1 \cdot 1100 = 110$ eurot, mis jällegi lisatakse olemasolevale 1100 eurole. Nii on kolmanda aasta algul intressi teenivaks summaks 1100 + 110 = 1210 eurot. Kolmanda aasta lõpuks on see summa teeninud intressi $0{,}1 \cdot 1210 = 121$ eurot ning arvele on kogunenud summa 1210 + 121 = 1331 eurot. Seega kolmanda aasta jooksul teenis 1000 eurot intressi 1331- 1000 = 331 eurot. Kui intresse oleks arvutatud lihtintresside reegli järgi, olnuks kolme aastaga teenitud intress $I = P \cdot t \cdot r = 1000 \cdot 3.0{,}1 = 300$ eurot. Kanname tulemused joonisel 2.2.1 näidatud skeemile. Esitatud skeemilt nähtub, et liitintressid kasvavad kiirenevalt ning aastast suuremate tähtaegade korral annavad suurema tähtpäevaväärtuse. Samas võib veenduda, et aastast lühemate tähtaegade korral annab lihtintresside meetod suurema tähtpäevaväärtuse.

	Liitintresside meetod		Lihtintresside meetod	
Periood	Intressi teeniv summa	Intress	Intressi teeniv summa	Intress
1. aasta	1000 eurot	100 eurot	1000 eurot	100 eurot
2. aasta	1100 eurot	110 eurot	1000 eurot	100 eurot
3. aasta	1210 eurot	121 eurot	1000 eurot	100 eurot
	Intress kokku	331 eurot		300 eurot
	Tähtpäevaväärtus	1331 eurot		1300 eurot

Joonis 2.2.1. Liht- ja liitintresside võrdlus.

Olgu

P investeeringu põhisumma (*principle),*

i intressimäär kapitalisatsiooniperioodi kohta (*periodic rate of interest*),

n kapitalisatsiooniperioodide arv (*number of compounding periods*),

S tähtpäevaväärtus ehk tulevikuväärtus *(maturity value or future value).*

Siis:

esimese kapitalisatsiooniperioodi lõpus lisatakse põhisummale P intress $P \cdot i$ ning saadakse teise kapitalisatsiooniperioodi alguseks summa

$$P + P \cdot i = P \cdot (1+i);$$

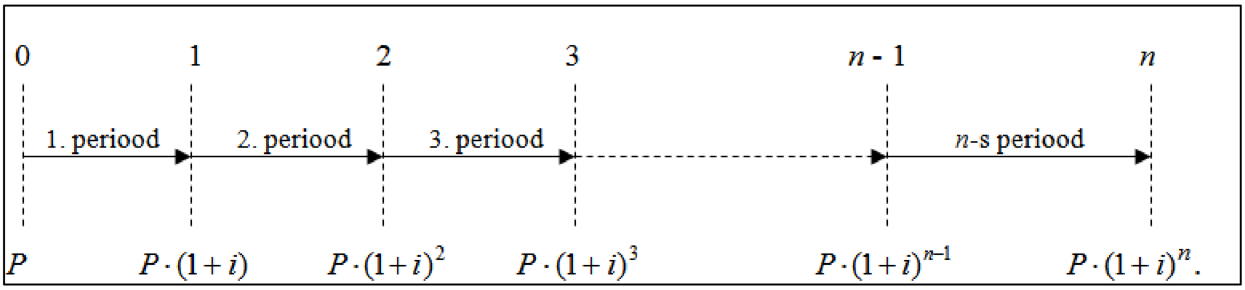
teise kapitalisatsiooniperioodi lõpus lisatakse summale $P \cdot (1+i)$ intress $P \cdot (1+i) \cdot i$ ning saadakse kolmanda kapitalisatsiooniperioodi alguseks summa

$$P \cdot (1+i) + P \cdot (1+i) \cdot i = P \cdot (1+i) \cdot (1+i) = P \cdot (1+i)^2 .$$

Peale *n*-ndat kapitalisatsiooniperioodi saadakse analoogiliselt jätkates järgneva kapitalisatsiooni-perioodi alguseks summa

$$S = P \cdot (1+i)^n . \qquad (2.2.4)$$

Kujutame kirjeldatud tulevikuväärtuse tuletuskäiku joonisel 2.2.2 näidatud skeemil.



Joonis 2.2.2. Tulevikuväärtuse arvutamine liitintresside meetodiga.

Saadud valem ongi tulevikuväärtuse arvutamise valemiks. Veel leiame, et n kapitalisatsiooni-perioodi jooksul teenitud intress

$$I = S - P \qquad (2.2.5)$$

ehk

$$I = P \cdot \left[(1+i)^n - 1 \right]. \qquad (2.2.6)$$

Märkus 2.2.1. Valemite (2.2.4)-(2.2.6) rakendamisel tuleb alati jälgida, et intressimäär i oleks alati antud kapitalisatsiooniperioodi kohta.

Näide 2.2.3. Jüri pani investeerimiskontole rahasumma 10 000 eurot. Kui suur on selle investeeringu tähtpäevaväärtus 2,5 aasta pärast ning kui suur on intress, kui poolaasta intressimäär on 15,5% ning intress lisatakse kontole iga poolaasta lõpul?

Lahendus.

Kuna 2,5 aastat sisaldab 5 pooleaastast perioodi, siis

$$P = 10000,\ n = 5,\ i = 0{,}155$$

ning investeeringu tähtpäevaväärtus on valemi (2.3.1) põhjal

$$S = 10\,000 \cdot (1 + 0{,}155)^5 = 20554{,}64 \text{ eurot}$$

ning intressid valemi (2.2.5) põhjal

$$I = 20554{,}64 - 10000 = 10554{,}64 \text{ eurot.}$$

Vastus: investeeringu tähtpäevaväärtus on 20554,64 eurot ning intress 10554,64. #

Nii nagu lihtintresside korral, antakse panganduses tavaliselt intressimäär ühe aasta kohta. Aastaintressimäära nimetatakse ka **nominaalseks intressimääraks** ehk **nominaalintressimääraks** (*nominal rate of interest / nominal interest rate*) ja tähistatakse edaspidi sümboliga *j*. Kui

m on kapitalisatsioonide arv aastas,

i intressimäär kapitalisatsiooniperioodi kohta,

siis

$$j = m \cdot i\,. \tag{2.2.7}$$

Näide 2.2.4. Leida kapitalisatsiooniperioodide arv n ja intressimäär i kapitalisatsiooniperioodi kohta, kui

a) aastane intressimäär on 12% ühe kapitalisatsiooniga aastas ja tehingu kestus on 9 aastat,

aastane intressimäär on 8,5% kapitalisatsiooniga iga poolaasta järel ning tehingu kestus on 12 aastat;

b) aastane intressimäär on 10,5% kapitalisatsiooniga iga kvartali lõpul ning tehingu kestus on 8,25 aastat;

c) aastane intressimäär on 18% kapitalisatsiooniga iga kuu lõpul ning tehingu kestus on 30 kuud.

Lahendus.

Valemist (2.2.7) avaldame $i = \dfrac{j}{m}$, mistõttu

a) $i = \dfrac{12\%}{1} = 12\% = 0{,}12$ ning $n = 9 \cdot 1 = 9$;

b) $i = \dfrac{8{,}5\%}{2} = 4{,}25\% = 0{,}0425$ ning $n = 12 \cdot 2 = 24$;

c) $i = \frac{10{,}5\%}{4} = 2{,}625\% = 0{,}02625$ ning $n = 8{,}25 \cdot 4 = 33$;

d) $i = \frac{18\%}{12} = 1{,}5\% = 0{,}015$ ning $n = 30$. #

Näide 2.2.5. Leida kapitalisatsiooniperioodide arv *m* aastas, kui aastane intressimäär on 9,6% ja

a) intressimäär ühe kapitalisatsiooniperioodi kohta on 4,8%;

b) intressimäär ühe kapitalisatsiooniperioodi kohta on 9,6%;

c) intressimäär ühe kapitalisatsiooniperioodi kohta on 2,4%;

d) intressimäär ühe kapitalisatsiooniperioodi kohta on 0,8%.

Lahendus.

Valemist (2.2.7) avaldame $m = \frac{j}{i}$, mistõttu

a) $m = \frac{9{,}6\%}{4{,}8\%} = 2$;

b) $m = \frac{9{,}6\%}{9{,}6\%} = 1$;

c) $m = \frac{9{,}6\%}{2{,}4\%} = 4$;

d) $m = \frac{9{,}6\%}{0{,}8\%} = 12$. #

Näide 2.2.6. Leida nominaalne intressimäär, kui

a) kapitalisatsiooniperioodiks on 1 kuu ja kuuintressimäär 1,2%;

b) kapitalisatsiooniperioodiks on 1 kvartal ja kvartaliintressimäär 2,2%.

Lahendus.

Valemi (2.2.7) abil arvutame

a) $j = 12 \cdot 1{,}2 = 14{,}4\%$;

b) $j = 4 \cdot 2{,}2 = 8{,}8\%$. #

Näide 2.2.7. Marina pani viieks aastaks investeerimiskontole rahasumma 7 000 eurot. Kui suur on selle investeeringu tähtpäevaväärtus, kui kapitalisatsioonid toimuvad iga kvartali lõpus ning nominaalne intressimäär on 16%?

Lahendus.

Kuna

$$P = 7000,\ \ m = 4,\ \ j = 16\%\,,$$

siis

$$n = 5 \cdot 4 = 20\,,\ \ i = \frac{16\%}{4} = 4\% = 0{,}04,$$

$$S = 7000 \cdot (1 + 0{,}04)^{20} \approx 15337{,}86 \text{ eurot.}$$

Vastus: Marina investeering on kasvanud viie aastaga $15337{,}86$ euroni. #

Järgnevalt vaatame, kuidas mõjutab tehingu tulevikuväärtust kapitalisatsiooniperioodide arvu suurendamine sama nominaalse intressimäära ning püsiva investeerimisperioodi korral.

Näide 2.2.8. Tehti investeering 1000 eurot neljaks aastaks nominaalse intressimääraga 12%. Kui suur on selle investeeringu tulevikuväärtus, kui antud määra korral on

a) üks kapitalisatsioon aastas;

b) kapitalisatsioon iga poolaasta lõpus;

c) kapitalisatsioon iga kvartali lõpus;

d) kapitalisatsioon iga kuu lõpus.

Lahendus.

a) $i = 12\% = 0{,}12,\ \ n = 4 \cdot 1 = 4\,;\ \ S = 1000 \cdot (1 + 0{,}12)^4 \approx 1573{,}52$ eurot,

b) $i = \dfrac{12\%}{2} = 6\% = 0{,}06,\ \ n = 4 \cdot 2 = 8\,;\ \ S = 1000 \cdot (1 + 0{,}06)^8 \approx 1593{,}85$ eurot,

c) $i = \dfrac{12\%}{4} = 3\% = 0{,}03,\ \ n = 4 \cdot 4 = 16\,;\ \ S = 1000 \cdot (1 + 0{,}03)^{16} \approx 1604{,}71$ eurot,

d) $i = \dfrac{12\%}{12} = 1\% = 0{,}01,\ \ n = 4 \cdot 12 = 48\,;\ \ S = 1000 \cdot (1 + 0{,}01)^{48} \approx 1612{,}23$ eurot. #

Märkus 2.2.2. Näitest 2.2.8 paneme tähele, et kapitalisatsiooniperioodi sageduse suurendamine toob endaga kaasa investeeringu tulevikuväärtuse suurenemise. Veel märgime, et näites 2.2.8 antud ülesande lahendamiseks on võimalik kasutada ka veebikalkulaatorit „Investeering“.

Ka liitintresside korral võib intressimäär olla ajas muutuv. Olgu meil k erinevat perioodi n_k intressimääradega i_k. Siis tulevikuväärtus S arvutatakse valemiga

$$S = P \cdot (1+i_1)^{n_1} \cdot (1+i_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (1+i_k)^{n_k} \qquad (2.2.8)$$

Illustreerime esitatud valemit järgmise näitega.

Näide 2.2.9. Riina laenab 10 000 eurot viieks aastaks baasintressiga 12% aasta kohta. Seejuures kahe esimese aasta jooksul lisatakse baasintressile 0,5% ning intresside kapitalisatsioon toimub iga kuu lõpus, järgneva kolme aasta jooksul lisatakse baasintressile 0,75% ning intresside kapitalisatsioon toimub iga kvartali lõpus. Millise summa peab Riina laenu kustutamiseks tagasi maksma viie aasta pärast?

Lahendus.

Kujutame olulised andmed joonisel 2.2.3 esitatud skeemil. Siis

$$i_1 = \frac{12{,}5\%}{12} = 1{,}042\% \approx 0{,}0104, \; i_1 = \frac{12{,}75\%}{4} = 3{,}1875\% \approx 0{,}0319$$

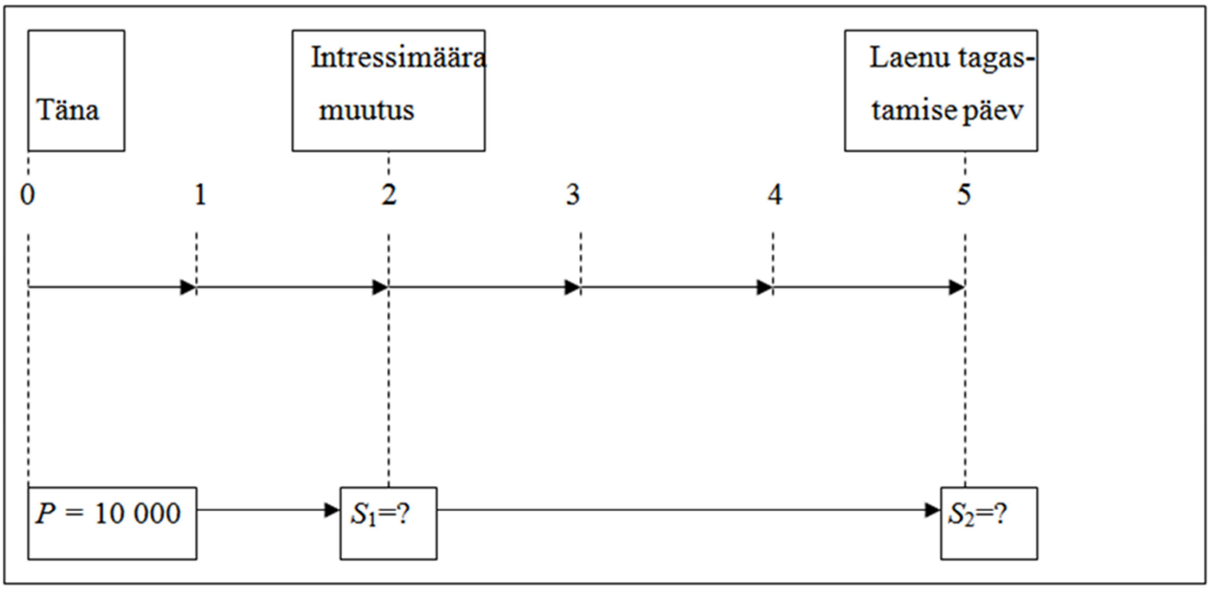
$$n_1 = 2 \cdot 12 = 24 \text{ kuud}, \; n_2 = 3 \cdot 4 = 12 \text{ kvartalit.}$$

Kõigepealt arvutame tulevikuväärtuse kaks aastat peale laenulepingu sõlmimist:

$$S_1 = P \cdot (1 + i_1)^{n_1} = 10000 \cdot (1 + 0{,}0104)^{24} = 12818{,}59 \text{ eurot.}$$

Nüüd leitud S_1 väärtus on viimaseks kolmeks aastaks uus nimiväärtus, mistõttu

$$S_2 = S_1 \cdot (1 + i_2)^{n_2} = 12818{,}59 \cdot (1 + 0{,}0319)^{12} = 18684{,}94 \text{ eurot.}$$



Joonis 2.2.3. Näites 2.2.9 esitatud ülesande lahendusskeem.

Vastus: Riina peab laenu kustutamiseks 5 aasta pärast tagasi maksma 18684,94 eurot. Märgime veel, et suuruste S_1 ja S_2 arvutamiseks saab kasutada veebikalkulaatorit „Investeering". #

2.2.3. Liht- ja liitintresside arvutamine mittetäisarvuliste ajaperioodide puhul ning finantstehingu ajaline kestus päevades

Eespool kasutasime valemeid (2.2.1)–(2.2.6) vaid juhtudel, kui *t* ja *n* olid täisarvud.

Märkus 2.2.3. Valemid (2.2.1)–(2.2.6) kehtivad ka juhtudel, kui *t* ja *n* on mittetäisarvulised.

Kui tehingu kestus on antud päevades, siis tuleb eespool kirjeldatud valemite kasutamiseks päevad teisendada aastateks valemi

$$t = \frac{N}{K} \tag{2.2.9}$$

järgi, kus *N* on tehingu kestus päevades ja *K* päevade arv aastas.

Valemit (2.2.9) kasutatakse panganduse praktikas üldiselt kolmel erineval viisil:

1) süsteem 365/365; arvestatakse, et igas aastas on 365 päeva (ka liigaasta loetakse 365 päeva pikkuseks), st *K* = 365 ja *N* määramisel võetakse arvesse täpne tehingu päevade arv, kasutatakse riikide keskpankades;

2) süsteem 365/360; arvestatakse, et aastas on kõik kuud 30 päeva pikkused, st päevade arv aastas *K* = 360 ja *N* määramisel võetakse arvesse täpne tehingu päevade arv, kasutatakse riikidevahelistes laenutehingutes, siseriiklikult ka näiteks Belgias, Prantsusmaal, Rootsis;

3) süsteem 360/360; arvestatakse, et *K* = 360 ja *N* määramisel võetakse arvesse, et aastas on kõik kuud 30 päeva pikkused, näiteks, kui veebruar kuulub tehinguperioodi, siis loetakse ka selle pikkuseks 30 päeva; kasutatakse mõnede riikide kommertspankades, ettevõtete raamatupidamise hetkeseisu hindamisel.

Märkus 2.2.4. Kuna Eesti kommertspankades, näiteks Swedbank'is, SEB-is kasutatakse enamasti süsteemi 365/360, siis kasutame seda ka oma järgnevates arvutustes. Märgime siiski, et hiljem vaatluse alla tulevate keskmise ja pika tähtajaga võlakirjade ning annuiteetide korral kasutatakse süsteemi 360/360. Samuti kasutame süsteemi 360/360 juhtudel, kui tehingu kestus on antud aastates, poolaastates, kvartalites või kuudes, kuid ei ole märgitud tehingu täpset alguse ja lõpu kuupäeva. Näiteks, kui tehingu kestus on kaks kuud, siis arvestame, et aastates on see $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

Märkus 2.2.5. Valemite (2.2.1)–(2.2.6) kasutamisel on oluline jälgida, et tehingu kestuse ja intressimäära mõõtmiseks kasutatud ühikud oleksid kooskõlas. See tähendab, et kui aeg t (või n) on aastates, siis ka intressimäär r (või i) peaks olema antud ühe aasta kohta või vastupidi, kui intressimäär r (või i) on antud ühe aasta kohta, siis ka aeg t (või n) peab olema aastates. Muidugi, kui aeg on näiteks antud kuudes, siis peaks ka intressimäär olema antud ühe kuu kohta.

Näide 2.2.10. Milliseid r ja t arvulisi väärtusi tuleb kasutada valemite (2.2.1)-(2.2.3) rakendamisel, kui

a) kvartali intressimäär on 3,6% ja finantstehingu ajaline kestus on 7 kuud;

b) ühe kuu intressimäär on 1,25% ja finantstehingu ajaline kestus on 155 päeva;

c) poole aasta intressimäär on 5,5% ja finantstehingu ajaline kestus on 1 aasta ja 3 kuud?

Lahendus.

a) **Esimene võimalus**: ühe kuu intressimäär on 3,6 : 3 = 1,2% ehk r = 0,012 ja t = 7 (kuud).

Teine võimalus: (aastane) intressimäär on $4 \cdot 3{,}6 = 14{,}4\%$ ehk r = 0,144 ja $t = \frac{7}{12}$ (aastat).

b) (aastane) intressimäär on $12 \cdot 1{,}25 = 15\%$ ehk r = 0,15 ja $t = \frac{155}{360} \approx 0{,}431$ (aastat).

c) (aastane) intressimäär on $2 \cdot 5{,}5 = 11\%$ ehk r = 0,11 ja $t = 1 + \frac{3}{12} = 1{,}25$ (aastat). #

Kui tehingu algus- ja lõppkuupäev on teada, saame leida selle täpse ajalise pikkuse päevades.

Märkus 2.2.6. Kokkuleppeliselt võetakse tehingu päevade lugemisel arvesse tehingu alguskuupäev, kuid ei võeta arvesse tehingu lõppkuupäeva.

Järgnevates arvutustes on vaja teada päevade täpset arvu igas kuus:

jaanuar	31	veebruar	28 (29)	märts	31	aprill	30
mai	31	juuni	30	juuli	31	august	31
september	30	oktoober	31	november	30	detsember	31

Näide 2.2.11. Leida tehingu ajaline kestus päevades, kui alguskuupäev on 28. jaanuar ja lõppkuupäev 14. mai samal kalendriaastal (ei ole liigaasta).

Lahendus.

Alguskuupäev 28. jaanuar – võetakse arvesse; lõppkuupäeva 14. mai – ei arvestata.

Päevade arv: jaanuaris 4

veebruaris 28

märtsis	31
aprillis	30
mais	13
Kokku	106 päeva #

Näide 2.2.12. Leida tehingu ajaline kestus päevades, kui tehing algab 2. oktoobril 2011. aastal ja lõpeb 12. märtsil 2012. aastal.

Lahendus.

Alguskuupäev 2. oktoober 2011 - võetakse arvesse; lõppkuupäeva 12. märts 2012 – ei arvestata.

Päevade arv:	oktoobris 2011	30
	novembris	30
	detsembris	31
	jaanuaris 2012	31
	veebruaris	29 (liigaasta)
	märtsis	11
	Kokku	162 päeva #

Märkus 2.2.7. Näidetes 2.2.11 ja 2.2.12 arvutatud tehingu ajalise kestuse saab leida ka veebikalkulaatori „Tehinguaeg“ abil. Edaspidi soovitamegi juhul, kui tehingu algus- ja lõpp-kuupäev on antud, leida tehingu kestus nimetatud kalkulaatoriga.

Järgnevalt käsitleme intressi arvutamist mittetäisarvuliste ajaperioodide korral.

Näide 2.2.13. Arvutada intress, kui

a) tehingu põhisumma on 250 eurot, kvartali lihtintressimäär on 3,6% ja finantstehingu ajaline kestus on 7 kuud;

b) tehingu põhisumma on 1350 eurot, ühe kuu lihtintressimäär on 1,25% ja finantstehingu ajaline kestus on 155 päeva;

c) tehingu põhisumma on 6200 eurot, poole aasta lihtintressimäär on 5,5% ja finantstehingu ajaline kestus on 1 aasta ja 3 kuud?

Lahendus.

Kasutades valemit (2.2.1) ja näites 2.2.10 esitatud *r* ja *t* arvutusi, saame järgmised tulemused:

a) Esimene võimalus: P = 250, r = 0,012 (kuus) ja t = 7 kuud ning

$$I = P \cdot r \cdot t = 250 \cdot 0{,}012 \cdot 7 = 21 \text{ eurot.}$$

Teine võimalus: P = 250, r = 0,144 (aastas) ja $t = \frac{7}{12}$ aastat ning

$$I = P \cdot r \cdot t = 250 \cdot 0{,}144 \cdot \frac{7}{12} = 21 \text{ eurot;}$$

b) P = 1350, r = 0,15 ja $t = \frac{155}{360}$ (aastat) ning

$$I = P \cdot r \cdot t = 1350 \cdot 0{,}15 \cdot \frac{155}{360} \approx 87{,}19 \text{ eurot;}$$

c) P = 6200, r = 0,11 ja $t = 1{,}25$ (aastat). ning

$$I = P \cdot r \cdot t = 6200 \cdot 0{,}11 \cdot 1{,}25 \approx 852{,}5 \text{ eurot. \#}$$

Näide 2.2.14. Arvutada investeeringu 10 000 eurot intress, kui lihtintressimäär on 10,5% ning investeeringu ajavahemik on 02.10. 2011 - 12. 03.2012.

Lahendus.

Et investeeringu kestus on 162 päeva (vt näide 2.2.12), siis

$$t = \frac{162}{360}; \text{ lisaks sellele } P = 10\,000,\ r = 0{,}105.$$

Järelikult $I = P \cdot r \cdot t = 10000 \cdot 0{,}105 \cdot \frac{162}{360} \approx 472{,}5$ eurot. #

Kui tehinguperioodi vältel intressimäär muutub, tuleb kogu periood jaotada osaperioodideks, mille vältel intressimäär on konstantne, arvutada intress iga osaperioodi kohta eraldi ja tehingu intressiks on siis osaperioodide intresside summa.

Näide 2.2.15. Arvutada investeeringu 13 000 eurot intress, kui investeeringu ajavahemik on 04.08.2011 - 12.06.2012 ning lihtintressimäär on algul 10,5%, kuid alates 01.12.2011 tõuseb intressimäär 11 protsendini ning alates 04.03.2012 11,5 protsendini.

Lahendus.

Vastavalt intressimäära muutumisele jaotame kogu perioodi kolme ossa. Tulemused esitame järgnevas tabelis (intresside arvestamisel peame silmas, et arvesse läheb osaperioodi esimene päev, kuid mitte viimane päev).

Osavahemik	Päevade arv	Intressimäär	Osaperioodide intress
04.08.2011-01.12.2011	28+30+31+30 =119	10,5%	451,21 eurot (1)
01.12.2011-04.03.2012	31+31+29+3 = 94	11%	373,39 eurot (2)
04.03.2012-12.06.2012	28+30+31+11 = 100	11,5%	415,28 eurot (3)
		Kokku	1239,88 eurot

(1) $I = P \cdot r \cdot t = 13000 \cdot 0{,}105 \cdot \dfrac{119}{360} \approx 451{,}21$ eurot

(2) $I = P \cdot r \cdot t = 13000 \cdot 0{,}11 \cdot \dfrac{94}{360} \approx 373{,}39$ eurot

(3) $I = P \cdot r \cdot t = 13000 \cdot 0{,}115 \cdot \dfrac{100}{360} \approx 415{,}28$ eurot

Vastus: Investeeringu koguintress on 1239,88 eurot. #

Näide 2.2.16. Kirsti sai pangalt kaheks aastaks ja 160-ks päevaks laenu 1500 eurot aastase intressimääraga 14%, mille lubas kustutada ühekordse maksega laenutähtaja lõpul. Kui suur oli pangale tagasimakstav summa, kui laenuintress lisatakse põhisummale iga aasta lõpus? Kui suur oli intress?

Lahendus.

Kuna

$$P = 1500,\ \ n = 2 + \frac{160}{360} \approx 2{,}4444 \text{ aastat},\ \ i = 0{,}14,$$

siis valemi (2.2.4) põhjal

$$S = 1500 \cdot (1 + 0{,}14)^{2{,}4444} \approx 2066{,}28 \text{ eurot},$$

järelikult

$$I = 2066{,}28 - 1500 = 566{,}28 \text{ eurot}.$$

Vastus: Kirsti pidi pangale maksma 2066,28 eurot, millest intressid moodustavad 566,28 eurot. #

2.2.4. Tehingu põhisumma, intressimäära ning tehingu kestuse arvutamine

Kuna valemites

$$I = P \cdot r \cdot t\,,\ S = P \cdot (1 + r \cdot t)\,,\ I = P \cdot \left[(1+i)^n - 1\right] \text{ ja } S = P \cdot (1+i)^n$$

on neli suurust, siis mistahes kolm teadaolevat komponenti neist määravad üheselt ka neljanda komponendi. Näiteks, teades *I*, *r* ja *t* väärtusi, saame valemist $I = P \cdot r \cdot t$ leida tehingu põhisumma:

$$P = \frac{I}{r \cdot t}. \qquad (2.2.10)$$

Valemi (2.2.10) kasutamise asemel aga võib toimida ka nii, et asendame valemis $I = P \cdot r \cdot t$ kolme komponendi teadaolevad väärtused ning lahendame neljanda (hetkel tundmatu) komponendi suhtes tekkinud võrrandi.

Näide 2.2.17. Joosep paigutas 10 kuuks investeerimisfondi teatava rahasumma aastase lihtintressimääraga 5,5% ning teenis antud investeeringust 80 eurot intressi. Kui suur oli see tähtajalisele hoiusele pandud summa?

Lahendus.

Antud juhul *I* = 80, *r* = 0,055 ning $t = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$ aastat.

Esimene võimalus: valemit (2.2.10) kasutades arvutame

$$P = \frac{80}{0{,}055 \cdot \frac{5}{6}} \approx 1745{,}46 \text{ eurot.}$$

Teine võimalus: asetades teadaolevad muutujate väärtused valemisse $I = P \cdot r \cdot t,$ saame

$$80 = P \cdot 0{,}055 \cdot \frac{5}{6} \text{ ehk } 80 = P \cdot 0{,}045833,$$

millest avaldame

$$P = \frac{80}{0{,}045833} \approx 1745{,}47 \text{ eurot.}$$

Paneme tähele, et kahel erineval viisil arvutades tekkis ühe eurosendi suurune erinevus. Lahknevus tuleneb asjaolust, et teisel juhul oli 0,045833 ümardatud suurus, esimesel juhul toimus ümardamine alles lõppvastuses; seega esimesel juhul saadud vastus on täpsem. Võime aga siiski märkida, et vastuste erinevus ei ole oluliselt suur.

Vastus: Joosep paigutas tähtajalisele hoiusele 1745,46 eurot. #

Näide 2.2.18. Oskar soovib osta jalgratast, mis maksab 200 eurot, kuid hetkel on tal vaba raha ainult 180 eurot. Oskar leidis puuduoleva 20 euro kogumiseks investeerimisvõimaluse, mille lihtintressimäär on 9,52%. Kui pikk peaks olema sellise investeeringu tähtaeg, kui Oskar investeerib kõik kasutada olevad 180 eurot?

Lahendus.

Kuna P = 180, I = 20 ja $r = 0{,}0952$, siis valemist $I = P \cdot r \cdot t$ saame

$$t = \frac{I}{P \cdot r} = \frac{20}{0{,}0952 \cdot 180} \approx 1{,}167134 \text{ aastat} = 1{,}167134 \cdot 360 \text{ päeva} \approx 420 \text{ päeva.}$$

Vastus: vajamineva raha kogumiseks kulub 420 päeva. #

Näide 2.2.19. Investeerimisfond garanteerib, et investeeringu 4000 eurot tähtpäevaväärtus on kolme aasta pärast 5100 eurot. Leida kapitalisatsiooniperioodi intressimäär, kui

a) kapitalisatsioon on iga aasta lõpus;

b) kapitalisatsioon on iga kvartali lõpus.

Lahendus.

Valemist $S = P \cdot (1+i)^n$ avaldame

$$(1+i)^n = \frac{S}{P} \Rightarrow 1+i = \sqrt[n]{\frac{S}{P}} \Rightarrow$$

$$i = \sqrt[n]{\frac{S}{P}} - 1.$$

Antud juhul P = 4000, S = 5100.

a) $m = 1$, $n = 3 \cdot 1 = 3$; $i = \sqrt[n]{\frac{S}{P}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{5100}{4000}} - 1 \approx 0{,}0844 = 8{,}44\%$ aasta kohta;

b) $m = 4$, $n = 3 \cdot 4 = 12$; $i = \sqrt[n]{\frac{S}{P}} - 1 = \sqrt[12]{\frac{5100}{4000}} - 1 \approx 0{,}0205 = 2{,}05\%$ kvartali kohta.

Vastus: intressimäär iga aasta lõpus 8,44% ja kvartali lõpus 2,05%. #

ÜLESANDED

2.2.1. Milliseid *r* ja *t* arvulisi väärtusi tuleb kasutada valemi $I = P \cdot r \cdot t$ kasutamisel, kui

a) intressimäär on 6,5% ja finantstehingu ajaline kestus on 2,5 aastat;

b) kvartali intressimäär on 3,6% ja finantstehingu ajaline kestus on 11 kuud;

c) ühe kuu intressimäär on 1% ja finantstehingu ajaline kestus on 135 päeva;

d) poole aasta intressimäär on 4,5% ja finantstehingu ajaline kestus on 1 aasta ning 9 kuud?

2.2.2. Leida kapitalisatsiooniperioodide arv *n* ja intressimäär *i* kapitalisatsiooniperioodi kohta, juhul kui

a) aastaintressimäär on 10% ühe kapitalisatsiooniga aastas ja tehingu kestus on 7 aastat;

b) aastaintressimäär on 12,5% kapitalisatsiooniga iga poolaasta järel ning tehingu kestus on 8 aastat;

c) aastaintressimäär on 11,5% kapitalisatsiooniga iga kvartali lõpul ning tehingu kestus on 7,75 aastat;

d) aastaintressimäär on 16% kapitalisatsiooniga iga kuu lõpul ning tehingu kestus on 30 kuud;

e) aastane intressimäär on 13% kapitalisatsiooniga iga kuu lõpul ning tehingu kestus on 5 aastat ja 2 kuud.

2.2.3. Leida kapitalisatsiooniperioodide arv *m* aastas, kui aastane intressimäär on 12,4% ja

a) intressimäär ühe kapitalisatsiooniperioodi kohta on 6,2%;

b) intressimäär ühe kapitalisatsiooniperioodi kohta on 12,4%;

c) intressimäär ühe kapitalisatsiooniperioodi kohta on 3,1%;

d) intressimäär ühe kapitalisatsiooniperioodi kohta on 1,033%.

2.2.4. Leida nominaalne intressimäär, kui

a) kapitalisatsiooniperioodiks on 1 kuu ja intressimäär selle kohta 1,1%;

b) kapitalisatsiooniperioodiks on 1 kvartal ja intressimäär selle kohta 2,35%;

c) kapitalisatsiooniperioodiks on poolaasta ja intressimäär selle kohta 4,3%.

2.2.5. Sass pani neljaks aastaks investeerimiskontole rahasumma 6 000 eurot. Kui suur on selle investeeringu tähtpäevaväärtus, kui kapitalisatsioonid toimuvad iga poolaasta lõpul ning nominaalne intressimäär on 12%?

2.2.6. Investeeriti 3000 eurot kolmeks aastaks nominaalse intressimääraga 13%. Kui suur on selle investeeringu tulevikuväärtus, kui antud määra korral on

a) üks kapitalisatsioon aastas;

b) kapitalisatsioon on iga poolaasta lõpus;

c) kapitalisatsioon on iga kvartali lõpus;

d) kapitalisatsioon on iga kuu lõpus?

Mitu protsenti muutus tulevikuväärtus neil juhtudel, kui kapitalisatsioonide arv kasvas

e) ühelt kahele, f) ühelt neljale, g) ühelt kaheteistkümnele?

Leida kõik eespoolnimetatud komponendid, kui investeeriti 8000 eurot nominaalse intressimääraga 8%? Millise järelduse saab tehtud arvutustest teha?

2.2.7. Leida järgnevas tabelis antud andmetele vastavad tähtpäevaväärtused.

Nr	Põhisumma	Nominaalne	Kapitalisatsioone	Ajaline
1.	300	12,5%	aasta lõpus	7 aastat
2.	750	10,5%	poolaasta lõpus	12 aastat
3.	1250	16,5%	kvartali lõpus	9 aastat
4.	3000	12%	kuu lõpus	11,25 aastat
5.	850	13,5%	poolaasta lõpus	27 kuud
6.	1300	14,4%	kvartali lõpus	40 kuud

2.2.8. Joosep pani investeerimiskontole rahasumma 8 500 eurot. Kui suur on selle investeeringu tähtpäevaväärtus 3,5 aasta pärast ning kui suur on intress, kui kvartali liitintressimäär on 3,5% ning intress lisatakse kontole iga poolaasta lõpul?

2.2.9. Leida tehingu ajaline pikkus päevades, kui selle

a) alguskuupäev on 18. jaanuar ja lõppkuupäev 10. mai samal aastal (ei ole liigaasta);

b) alguskuupäev on 5. novembril 2011 ja lõppkuupäev 12. aprillil 2012;

c) alguskuupäev on 3. märtsil 2011 ja lõppkuupäev 12. detsembril 2011.

2.2.10. Arvutada intress, kui

a) tehingu põhisumma on 5000 eurot, lihtintressimäär 7% ja finantstehingu ajaline kestus on 2 aastat;

b) tehingu põhisumma on 350 eurot, kvartali lihtintressimäär on 2,6% ja finantstehingu ajaline kestus on 5 kuud;

c) tehingu põhisumma on 1650 eurot, ühe kuu lihtintressimäär on 1,2% ja finantstehingu ajaline kestus on 123 päeva;

d) tehingu põhisumma on 4200 eurot, poole aasta lihtintressimäär on 6,5% jafinantstehingu ajaline kestus on 1 aasta ning 8 kuud?

2.2.11. Arvutada järgnevate investeeringute intress:

a) 2500 eurot perioodiks 02.03. 2011 - 11. 08.2011 lihtintressimääraga 10,5%;

b) 2500 eurot perioodiks 07.10. 2011 - 12. 04.2012 lihtintressimääraga 9,5%;

c) 424,23 eurot perioodiks 04.04. 2011 - 04. 11.2011 lihtintressimääraga 12,75%.

2.2.12.* Arvutada investeeringu 18 000 eurot intress, kui investeeringu periood on 06.05.2011 - 12.04.2012 ning lihtintressimäär on algul 10%, alates 01.10.2011 tõusis intressimäär 10,5 protsendini ning 04.02.2012 alates 11 protsendini.

2.2.13. Leia puuduvad elemendid järgmises tabelis.

Nr	Intress (eurot)	Põhisumma (eurot)	Lihtintressimäär	Ajaline kestus
1.	58	…	11,5%	5 kuud
2.	256,25	…	10,25%	250 päeva
3.	200	3000	…	335 päeva
4.	75	965	…	11 kuud
5.	136,34	954	12,25%	? (kuudes)
6.	55	775	9,75%	? (päevades)

2.2.14. Jürgen paigutas 9 kuuks tähtajalisele hoiusele teatava summa aastase lihtintressimääraga 2,5% ning teenis antud investeeringult 63 eurot intressi. Kui suur oli tähtajalisele hoiusele pandud summa?

2.2.15. Kaarel soovib 750 euro suuruselt investeeringult teenida 325 päeva jooksul 80 eurot intressi. Milline peaks olema selleks vajalik intressimäär?

2.2.16.* Osvald soovib osta telerit, mis maksab 400 eurot, kuid tal on vaba raha ainult 350 eurot. Osvald investeerib puuduoleva 50 euro kogumiseks olemasolevad 350 eurot intressimääraga 12%. Kui pikk peaks olema investeeringu tähtaeg päevades, et koguda puuduolevad 50 eurot?

2.2.17. Leida investeeringu

a) tähtpäevaväärtus, kui põhisumma on 2600 eurot ja intress 220 eurot;

b) intress, kui põhisumma on 1500 eurot ja tähtpäevaväärtus 1730 eurot;

c) põhisumma, kui tähtpäevaväärtus on 3200 eurot ja intress 450 eurot.

2.2.18. Jesper investeeris 1400 eurot fondi, mille lihtintressimäär on 9%. Milline on investeeringu väärtus

a) 9 kuu pärast, b) 135 päeva pärast?

2.2.19. Endel investeeris 650 eurot ajavahemikus 08.02.2011-30.08.2011 fondi, mille lihtintressimäär on 9,5%. Milline on investeeringu tähtpäevaväärtus?

2.2.20.* Leida investeeringu tähtpäevaväärtus 12. detsembril, kui investeering koosneb kolmest osainvesteeringust: sama aasta 8. veebruaril (mitte liigaasta) investeeriti 2000 eurot, 17. mail 3000 eurot ja 25. augustil 5000 eurot ning

a) lihtintressimäär on kogu investeerimisperioodi jooksul 8%;

b) osainvesteeringute lihtintressimäärad on vastavalt 7%, 8% ja 9,5%?

2.2.21.* Leida konto seis 22. detsembril, kui sama aasta 2. märtsil pandi arvele 1500 eurot, 6. juunil 4000 eurot, 3. juulil võeti arvelt välja 1800 eurot ning 8. septembril lisati arvele 2300 eurot, kui aasta lihtintressimäär on 8,2%.

2.2.22. Kui suure investeeringu lihtintressimääraga 11% peab Julius 13. veebruaril 2012 tegema, et selle tähtpäevaväärtus 18. juulil samal aastal oleks 12 100 eurot?

2.2.23. Järgmises tabelis on andmed kuue erineva investeeringu kohta. Leida nende investeeringute põhisumma ja puuduv element igas tabeli reas.

Investeeringu nr	Intress (eurot)	Tähtpäeva-väärtus (eurot)	Lihtintressimäär	Aeg
1.	…	305,9	12%	15 kuud
2.	95	800	…	350 päeva
3.	29,67	…	12,9%	8 kuud
4.	45	365	…	320 päeva
5.	76	754	11,25%	…
6.	…	702	9,2%	10 kuud

2.2.24. Karla sai 1. juunil 2009. aastal pangalt kolmeks aastaks ja 125-ks päevaks laenu 1700 eurot aastase intressimääraga 13%, mille lubas kustutada ühekordse maksega laenutähtaja lõpul. Kui suur oli pangale tagasimakstav summa, kui laenuintress lisatakse põhisummale iga täisaasta möödumisel lepingu sõlmimise algusest? Kui suur oli intress?

2.2.25.* Rain laenab 12 000 eurot viieks aastaks baasintressiga 11% aasta kohta. Seejuures kolme esimese aasta jooksul lisatakse baasintressile 0,5% ning intresside kapitalisatsioon toimub iga kvartali lõpus, järgneva kahe aasta jooksul lisatakse baasintressile 0,75% ning intresside kapitalisatsioon toimub iga kuu lõpus. Millise summa peab Rain laenu kustutamiseks tagasi maksma viie aasta pärast? Kui suur on intress?

2.2.26. Investeeriti teatav summa neljaks aastaks nominaalse liitintressimääraga 15%. Kui suur on selle investeeringu põhisumma, kui tähtpäevaväärtuseks on 3600 eurot?

2.2.27. Leida järgnevas tabelis antud andmetele vastavad põhisummad.

Nr	Tähtpäevaväärtus (eurot)	Nominaalne intressimäär	Kapitalisatsioone aastas	Ajaline kestus
1.	800	13%	Aasta lõpus	8 aastat
2.	1750	11,5%	Poolaasta lõpus	10 aastat
3.	600	15%	Kuu lõpus	6 aastat
4.	450	14,5%	Kvartali lõpus	5 aastat 6 kuud
5.	2550	15,5%	Poolaasta lõpus	42 kuud
6.	1300	14,4%	kuu lõpus	40 kuud

2.2.28.* Leida nominaalne aastaintressimäär alljärgnevas tabelis toodud juhtudel.

Nr	Põhisumma (eurot)	Tähtpäeva-väärtus	Ajaline kestus	Kapitalisatsioone aastas
1.	2000	4100	6 aastat	1
2.	3225	5970	5 aastat	4
3.	850	2100	10 aastat	2
4.	1125	2000	4 aastat 3 kuud	12
5.	645	1025	3 aastat 8 kuud	12
6.	1355	5205	15 aastat	4

2.2.29. Rait peab 3000 eurot tasuma kuue aasta pärast ning soovib selle summa koguda, investeerides selleks viieks aastaks teatava summa. Millise summa peab Rait investeerima, kui investeeringu nominaalne intressimäär on 14% ja kapitalisatsioon toimub üks kord poolaastas?

2.2.30.* Investeerimisfond garanteerib, et investeeringu 3500 eurot tähtpäevaväärtus on nelja aasta pärast 4900 eurot. Leida nominaalne intressimäär, kui

a) kapitalisatsioon on iga aasta lõpus;

b) kapitalisatsioon on iga kvartali lõpus;

c) kapitalisatsioon on iga kuu lõpus.

2.2.31.* Leida kapitalisatsiooniperioodide arv (ei pea olema täisarv) alljärgnevas tabelis antud juhtudel.

Üles. nr	Põhisumma (eurot)	Tähtpäeva-väärtus	Nominaalne intressimäär	Kapitalisatsioone aastas
1.	2080	5100	12%	1
2.	3225	5970	15%	4
3.	850	2100	8%	2
4.	1325	2200	16%	12
5.	645	1025	11%	12
6.	1355	5205	20%	4

2.2.32.* Aastane nominaalne intressimäär on 12%. Leida, millise aja jooksul investeeringu 1500 eurot tulevikuväärtus ületab kahekordselt põhisumma, kui intresse arvestatakse

a) lihtintresside meetodiga;

b) liitintresside meetodiga, kus intressid lisatakse 1 kord aasta lõpus;

c) liitintresside meetodiga, kus intressid lisatakse iga kvartali lõpus.

Kas vastused sõltuvad investeeringu suurusest?

2.2.33.* Aastane nominaalne intressimäär on 18%. Leida, millise aja jooksul investeeringu tulevikuväärtus ületab kolmekordselt nimiväärtuse, kui intresse arvestatakse

a) lihtintresside meetodiga;

b) liitintresside meetodiga, kus intressid lisatakse üks kord aasta lõpus,

2.2.34. Investeeriti 7000 eurot nominaalse intressimääraga 12%. Täita järgmine tabel, kus *k* tähistab investeeringu algusest möödunud kuude arvu, S_r vastavat lõppsummat, kui antud intressimäär on lihtintressimääraks ja S_j vastavat lõppsummat, kui antud intressimäär on liitintressimääraks.

k	0	1	3	5	8	12	13	15	18	24	30
S_r											
S_j											

Täita analoogiline tabel juhul, kui

a) 12% intressimäära asemel on 6%;

b) 7000 eurolise investeeringu asemel on 12 000 eurot.

Millise järelduse võib teha?

KIRJANDUST LUGEMISEKS

Ettevõtlikkusest ettevõtluseni: gümnaasiumiõpik. Toimetajad T. Saal jt., Tallinn, SA Teadlik Valik, 2012. lk 62.

Kaasa, A. Majandusteaduse matemaatilised alused. Tartu Ülikooli Kirj., 2002. Lk 182-183.

Majanduse ABC / Arrak, A., jt. III trükk. Tartu, Avatar OÜ, 2002. Lk 189-190.

Telgmaa, A., Rahandusküsimusi koolimatemaatikas. Tallinn, Kirj. „Avita“, 1994. Lk 15-18, 29-34.

2.3. Raha nüüdisväärtus, maksete asendamine ekvivalentsete maksetega

Antud osas käsitleme kokkulepitud maksegraafiku asendamist uue maksegraafikuga ja tehinguid võlakirjadega. Nimetatud tehingute aluseks on aga raha nüüdisväärtuse mõiste.

2.3.1. Raha nüüdisväärtus

On lihtne märgata, et valemite $S = P \cdot (1 + r \cdot t)$ ja $S = P \cdot (1 + i)^n$ abil saame arvutada finantstehingu põhisumma, kui on teada tehingu lõppväärtus, ajaline kestus ja intressimäär.

Näide 2.3.1. Kui suure investeeringu lihtintressimääraga 10% peab Adalbert 3. veebruaril 2012. aastal tegema, et selle tähtpäevaväärtus 7. juunil samal aastal oleks 15 100 eurot?

Lahendus.

Päevade arv investeerimisperioodil on (2012 on liigaasta) 27 + 31 + 30 +31 + 6 = 125 ning

$$S = 15\,100,\ t = \frac{125}{360} \text{ aastat ja } r = 0{,}1.$$

Järelikult

$$15100 = P \cdot \left(1 + 0{,}1 \cdot \frac{125}{360}\right) \text{ ehk } 15100 = P \cdot 1{,}034722,$$

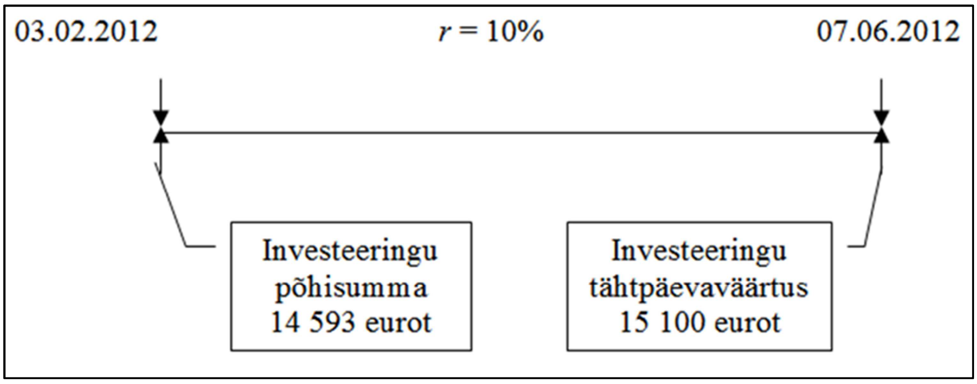
millest avaldame

$$P = \frac{15100}{1{,}034722} \approx 14593 \text{ eurot. \#}$$

Eelnevast näitest paneme tähele, et

esiteks: 125 päeva jooksul teenitud intress on 15 100 – 14 593 = 507 eurot, teiseks: igas päevas teenitakse intressi $\frac{507}{125} \approx 4$ eurot.

Majanduses, kus raha kasutamise eest tuleb tasuda intressi, on iga rahasumma antud intressimäära suhtes vaadeldav muutuvana ajas, sest igal erineval ajahetkel on vastav intress erinev. Raha väärtust vaadeldaval kuupäeval nimetatakse **raha ajaväärtuseks** (*time value of money*) ehk **dateeritud väärtuseks**.



Joonis 2.3.1. Investeeringu muutumine ajas näites 2.3.1.

Joonisel 2.3.1 illustreerime raha väärtuse muutumist ajas. Näeme, et lähtesumma 14 593 eurot kasvab 10% intressimäära korral 125 päeva jooksul 15 100 euroni. See tähendab, et investeeritud lähtesumma 14 593 eurot teenib 125 päeva jooksul 507 eurot intressi ehk teisiti öeldes, lähtesumma 14 593 eurot kasvab ligikaudu 4 eurot päevas. Siis antud investeeringu ajaväärtus 4. veebruaril 2012. aastal on ligikaudu 14 597 eurot, 5. veebruaril 2012. aastal ligikaudu 14 601 eurot jne, kuni 7. juunil 2012. aastal on antud investeeringu ajaväärtus 15100 eurot. Seega investeeritud summa kasvab päev-päevalt; kui näiteks on saabunud 3. veebruar 2012, siis lähteväärtus 14 593 eurot on tähtpäevaväärtuse 15 100 eurot nüüdisväärtuseks sel päeval, kui aga on jõudnud kätte 4. veebruar 2012, siis 14 597 eurot on tähtpäevaväärtuse 15 100 eurot nüüdisväärtuseks sel päeval jne.

Kui vaatleme investeeringu ajaväärtust kätte jõudnud päeval, siis seda väärtust nimetatakse antud investeeringu tähtpäevaväärtuse **nüüdisväärtuseks** (*present value*) sel päeval. Nüüdisväärtuse arvutamist tähtpäevaväärtuse kaudu nimetatakse **diskonteerimiseks** (*discounting*). Diskonteerimine on eriti oluline võlakirjatehingute korral, mida käsitleme osas 2.3.3.

Antud rahasumma kõiki ajaväärtusi erinevatel ajahetkedel loeme omavahel ekvivalentseteks ehk samaväärseteks.

Eelöeldust näeme, et nüüdisväärtuse arvutamise küsimus on samaväärne finantstehingus esineva põhisumma leidmisega juhul, kui tähtpäevaväärtus, ajaperiood ja intressimäär on teada. Seepärast saame nüüdisväärtuse arvutamiseks kasutada valemit $S = P \cdot (1 + r \cdot t)$, avaldades sellest *P*:

$$P = \frac{S}{1 + r \cdot t}. \tag{2.3.1}$$

Liitintresside nüüdisväärtuse arvutamise valemi saame, kui avaldame valemist $S = P \cdot (1+i)^n$ põhisumma *P*:

$$P = \frac{S}{(1+i)^n}. \tag{2.3.2}$$

Näide 2.3.2. Leida finantstehingu rahasumma nüüdisväärtus *P* viis kuud enne finantstehingu lõpptähtaega, kui nimetatud tehingu tähtpäevaväärtus on 2500 eurot ja lihtintressimäär 8%.

Lahendus.

Kuna

$$S = 2500,\ t = \frac{5}{12} \text{ aastat ja } r = 0{,}08,$$

siis valemi (2.3.1) abil leiame, et

$$P = \frac{S}{1 + r \cdot t} = \frac{2500}{1 + 0{,}08 \cdot \frac{5}{12}} \approx 2419{,}36 \text{ eurot. \#}$$

Näide 2.3.3. Ako peab 5000 eurot tasuma viie aasta pärast ning soovib selle summa koguda, investeerides selleks viieks aastaks teatava summa. Millise summa peab Ako investeerima, kui investeeringu nominaalne intressimäär on 12% ning kapitalisatsioon toimub üks kord kvartalis?

Lahendus.

Kuna

$$S = 5000,\ n = 5 \cdot 4 = 20 \text{ ja } i = \frac{12\%}{4} = 3\% = 0{,}03,$$

siis vastavalt valemile (2.3.2) leiame, et Ako peab investeerima

$$P = \frac{5000}{(1+0{,}03)^{20}} = 2768{,}38 \text{ eurot. \#}$$

2.3.2. Erinevatel aegadel tehtud investeeringute võrdlemine, maksete asendamine ekvivalentsete maksetega

Oluliseks küsimuseks finantsmatemaatikas on rahasummade võrdlemine erinevatel ajahetkedel. Kumb on enam väärt, kas omada 100 eurot täna või 110 eurot ühe aasta pärast? Esmapilgul võib tunduda, et milles küsimus, 110 eurot on ju enam väärt, sest 110 on suurem kui 100. Kuid asi ei ole nii lihtne nagu esmapilgul tundub, sest rahasumma nominaalne suurus ei võimalda hinnata, kumb maksetest on reaalselt väärtuslikum. Ei ole võimalik väita, et 110 eurot ühe aasta pärast on alati väärtuslikum, kui 100 eurot täna. Vastus sõltub turul kehtivast intressimäärast. Kui näiteks intressimäär on 15%, siis investeerides 100 eurot nimetatud intressimääraga, kasvab antud summa aasta jooksul 115 euroni, kui aga intressimäär on sel perioodil hoopis 5%, kasvab 100 eurot aasta jooksul ainult 105 euroni. Seepärast esimesel juhul on 100 eurot täna väärtuslikum kui 110 eurot ühe aasta pärast, teisel juhul on asi vastupidine.

Märkus 2.3.1. Tuleb märkida, et eelnevas arutelus erinevatel ajahetkedel esinevate nominaalselt erinevate rahasummade väärtuste võrdlemisel ei võtnud me arvesse kõiki asjaolusid. Esiteks, me ei arvestanud võimalikku inflatsiooni ehk raha ostujõu kahanemist ajas või deflatsiooni ehk raha ostujõu suurenemist ajas (mida tegelikkuses esineb harva ja millest räägime hiljem, punktis 2.3.3). Rahasummasid võrdlesime vaid intressimäära suhtes. Teiseks lisame veel, et ka intressimäärale tuginev võrdlus on suhteline või hinnanguline, sest sama tüüpi finantstehingutes võivad erinevate tehinguosaliste ja erinevate pankade puhul kasutusel olla erinevad intressimäärad.

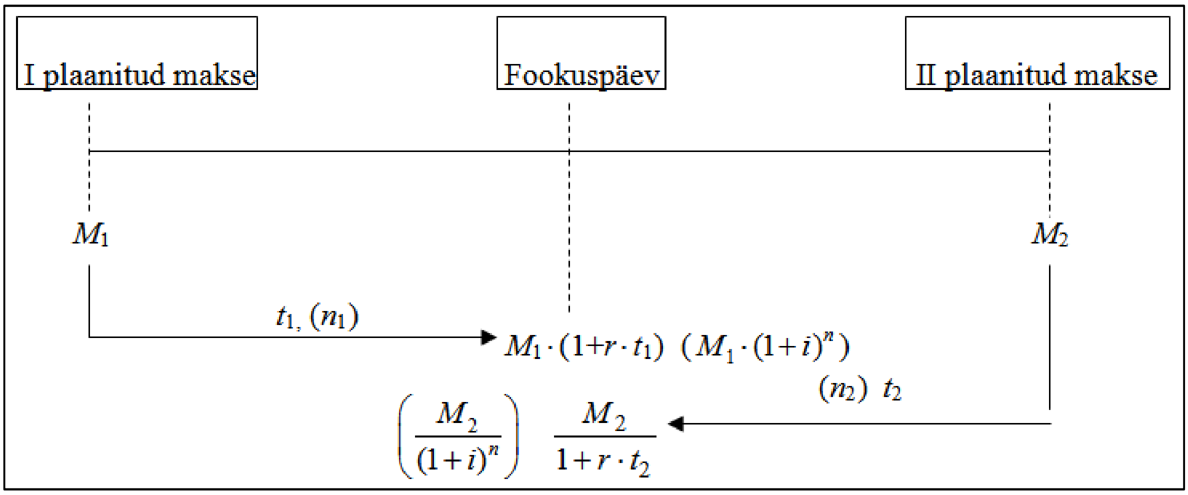
Asjaolu, et antud rahasumma kõik ajaväärtused erinevatel ajahetkedel on omavahel ekvivalentsed, annab meile võimaluse võrrelda finantstehingu rahasummasid erinevatel ajahetkedel. Selgitame öeldut järgmise näite abil. Oletame, et täna teeme investeeringu 1000 eurot intressimääraga 10%. Siis kolme kuu pärast on antud investeeringu ajaväärtus 1025 eurot $\left(S = 1000 \cdot (1+0{,}1 \cdot 0{,}25) = 1025\right)$, poole aasta pärast 1050 eurot, ühe aasta pärast 1100 eurot. Kõik nimetatud ajaväärtused 1025, 1050 ja 1100 on omavahel finantsiliselt ekvivalentsed. Järelikult finantsilise ekvivalentsuse printsiibi kohaselt tuleb erinevatel hetkedel sooritatud maksete võrdlemiseks arvutada võrreldavate maksete ajaväärtused ühel ja samal päeval, kasutades kehtivat või kokkulepitud intressimäära.

Nimetatud päeva, mille suhtes ajaväärtused arvutatakse, nimetame edaspidi **fookuspäevaks** (*focal date*).

Mida suurem on fookuspäeval arvutatud ajaväärtus, seda väärtuslikum antud investeering on.

Seejuures, kui fookuspäev on pärast plaanis ette nähtud makset, tuleb kasutada tähtpäevaväärtuse valemit $S = P\cdot(1+r\cdot t)$ või $S = P\cdot(1+i)^n$, kui aga enne plaanitud makset, siis nüüdisväärtuse valemit $P = \frac{S}{1+r\cdot t}$ või $P = \frac{S}{(1+i)^n}$. Illustreerime öeldut alljärgneva skeemiga (vt joonis 2.3.2), kus t_1 (n_1) on aeg I plaanitud maksest M_1 fookuspäevani ning t_2 (vastavalt n_2) on aeg fookuspäevast kuni II plaanitud makseni M_2.

Näide 2.3.1. Jüri võib osta lennupiletid täna 500 euro eest või neli kuud hiljem 540 euro eest. Milline variant on Jürile rahaliselt kasulikum, kui Jüril on võimalik 500 eurot neljaks kuuks välja laenata lihtintressimääraga 12%?



Joonis 2.3.2. Erinevatel ajahetkedel toimuvate maksete võrdlemine.

Lahendus.

Laenates 500 eurot välja, saab Jüri nelja kuu pärast võlgnikult tagasi summa

$$S = P\cdot(1+r\cdot t) = 500\cdot\left(1+0{,}12\cdot\frac{4}{12}\right) = 520 \text{ eurot.}$$

Kuna võlgnikult tagasioodatav summa osutus väiksemaks kui lennupileti hind 4 kuu pärast, siis on Jürile soodsam osta pilet välja täna 500 euro eest. Seega esimene variant annab teisega võrreldes tinglikult 540 - 520 = 20 eurot säästu. #

Näide 2.3.2. Milline peaks näites 2.3.1 olema intressimäär välja laenatavalt rahalt, et näites esitatud lennupileti ostu võimalused oleksid rahaliselt samaväärsed.

Lahendus.

Selleks, et mõlemad piletiostu võimalused oleksid samaväärsed, peaks välja laenatud rahalt teenitav intress olema 540 – 500 = 40 eurot. Valemit $I = P \cdot r \cdot t$ kasutades saame

$$40 = 500 \cdot r \cdot \frac{4}{12} \text{ ehk } \quad r = \frac{40 \cdot 12}{500 \cdot 4} = 0{,}24\,.$$

Vastus: Vajalik intressimäär peaks olema 24%.

Antud juhul saanuks vastuse leida ka lihtsamalt. Nimelt, näites 2.3.1 tegime kindlaks, et 12% intressimäär andis nelja kuuga 20 eurot intressi; järelikult sama pika aja jooksul annab kaks korda suuremat intressi (40 eurot) ka kaks korda suurem intressimäär ehk 24%. #

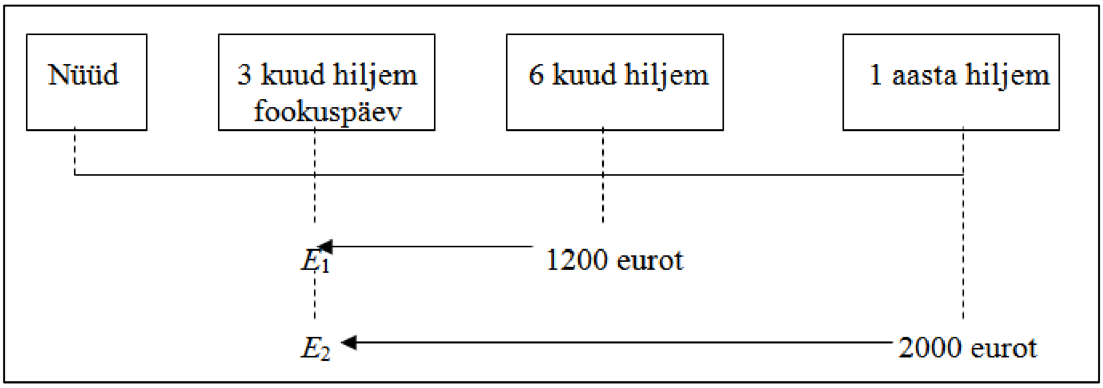
Ülalkirjeldatud rahasummade võrdlemise meetod võimaldab lepingus ette nähtud maksegraafiku (näiteks võla kustutamiseks kokku lepitud osamaksete graafiku) asendada teise, algul fikseerituga ekvivalentse maksegraafikuga.

Märkus 2.3.2. Lihtintresside puhul tuleb arvestada, et tulemus sõltub fookuspäeva valikust. Seepärast lisatakse uute maksegraafikute koostamisel lihtintresside meetodi puhul alati ka fookuspäev, mille suhtes ümberarvestamine toimub. Liitintresside puhul tulemus fookuspäevast ei sõltu. Antud asjaolu aitavad selgitada ülesandes 2.3.7 esitatud väited a) ja b).

Näide 2.3.3. Malle on sõlminud laenulepingu, mille kohaselt peab ta laenu kustutama kahe osamaksega, mis sisaldavad juba ka laenuintressi: 1200 eurot kuus kuud peale lepingu sõlmimist ja 2000 eurot üks aasta pärast lepingu sõlmimist. Kolm kuud peale lepingu sõlmimist sai Malle suure lotovõidu, mis võimaldab tal koheselt kogu võlg tasuda. Kui suure summa peaks Malle kolm kuud peale lepingu sõlmimist tasuma, et võlg kustutada, kui kokkulepitud lihtintressimäär oli 18% aastas ja fookuspäevaks valiti päev kolm kuud pärast lepingu sõlmimist? Milline oli võla nüüdisväärtus ehk võla väärtus praegusel ajahetkel?

Lahendus.

Kanname olulised andmed järgmisele skeemile (vt joonis 2.3.3). Antud skeemi kohaselt tuleb arvutada osamaksetega vastavalt ekvivalentsed ajaväärtused E_1 ja E_2 fookuspäeval; nende maksete summa ongi otsitavaks ühekordseks makseks kolm kuud peale lepingu sõlmimist, mis kustutab kogu võla. Kuna fookuspäev on enne plaanitavaid osamakseid, siis E_1 ja E_2



Joonis 2.3.3. Näites 2.3.3 esitatud ülesande lahendusskeem.

arvutamiseks peame kasutama nüüdisväärtuse arvutamise valemit (2.3.1), kus P rollis on kordamööda E_1 ja E_2. Seega

$$E_1 = \frac{S}{1+r\cdot t} = \frac{1200}{1+0{,}18\cdot\frac{3}{12}} = 1148{,}33 \text{ eurot} \quad (\text{siin } S = 1200,\ t = \frac{3}{12} \text{ aastat, } r = 0{,}18),$$

$$E_2 = \frac{S}{1+r\cdot t} = \frac{2000}{1+0{,}18\cdot\frac{9}{12}} = 1762{,}12 \text{ eurot} \quad (\text{siin } S = 2000,\ t = \frac{9}{12} \text{ aastat, } r = 0{,}18);$$

$$E_1 + E_2 = 1148{,}33 + 1762{,}12 = 2910{,}45 \text{ eurot.}$$

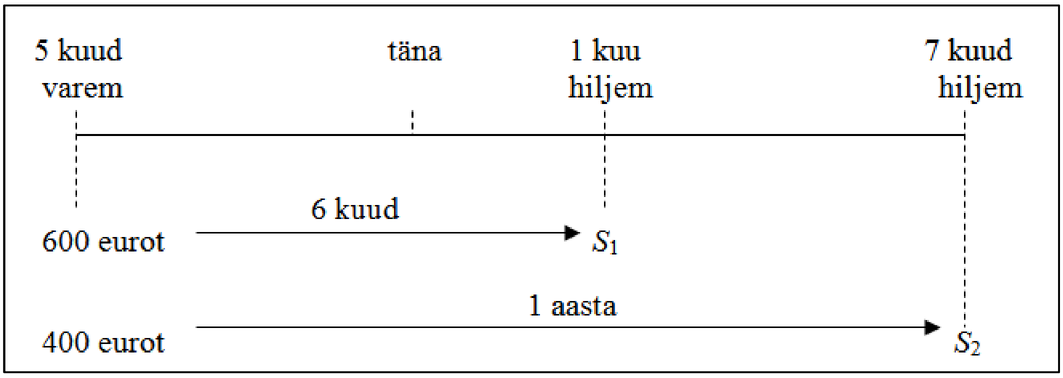
Vastus: Malle peaks kolm kuud peale lepingu sõlmimist tasuma 2910,45 eurot.

Arvutame nüüd välja ka tegelikult laenatud summa ehk laenu põhisumma P:

$$P = \frac{S}{1+r\cdot t} = \frac{2910{,}45}{1+0{,}18\cdot\frac{3}{12}} = 2785{,}12 \text{ eurot. \#}$$

Näide 2.3.4. Viis kuud tagasi laenas Kirsti Riinalt 1000 eurot, mille nõustus tagasi maksma kahe osamaksega, mille väärtused (ehk põhisummad) lepingu sõlmimisel olid 600 eurot ja 400 eurot, kusjuures esimene osamakse pidi toimuma kuus kuud ja teine osamakse üks aasta peale laenu saamist. Mõlemad nimetatud põhisummad kannavad veel intressi lihtintressimääraga 10%. Täna palus Kirsti Riinal nõustuda lubatud kahe makse asemel ühe maksega, mis toimuks kaheksa kuud peale laenu saamist. Millise summa peaks Riina kaheksa kuu pärast Kirstilt saama, kui turul kehtivaks lihtintressimääraks on täna 8% ja fookuspäevaks valiti päev kaheksa kuud peale laenu saamist?

Lahendus.



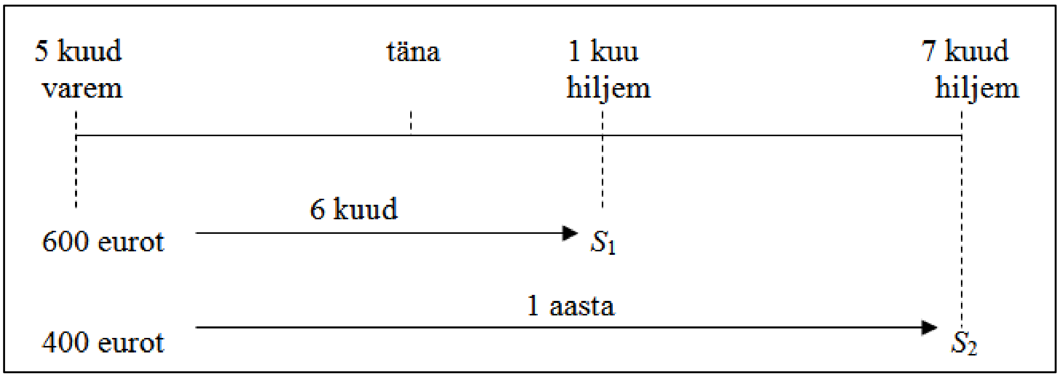
Joonis 2.3.4. Esialgselt planeeritud osamaksete tähtpäevaväärtused lubatud maksepäevadel näites 2.3.4.

Antud juhul tuleks leida esialgselt planeeritud osamaksete tähtpäevaväärtused lubatud maksepäevadel (joonisel 2.3.4 tähistatud sümbolitega S_1 ja S_2).

$$S_1 = P \cdot (1+rt) = 600 \cdot \left(1+0{,}1 \cdot \frac{6}{12}\right) = 630 \text{ eurot,}$$

$$S_2 = P \cdot (1+rt) = 400 \cdot (1+0{,}1 \cdot 1) = 440 \text{ eurot.}$$

Järgnevalt esitame skeemi (vt joonis 2.3.5), kus on märgitud eespool arvutatud osamaksed S_1 ja S_2 ning nendega vastavalt ekvivalentsed väärtused fookuspäeval (joonisel 2.3.5 tähistatud sümbolitega E_1 ja E_2).



Joonis 2.3.5. Väärtustega S1 ja S2 ekvivalentsed väärtused E1 ja E2 fookuspäeval näites 2.3.4.

$$E_1 = S_1 \cdot (1 + r \cdot t) = 630 \cdot \left(1+0{,}08 \cdot \frac{2}{12}\right) = 638{,}4 \text{ eurot,}$$

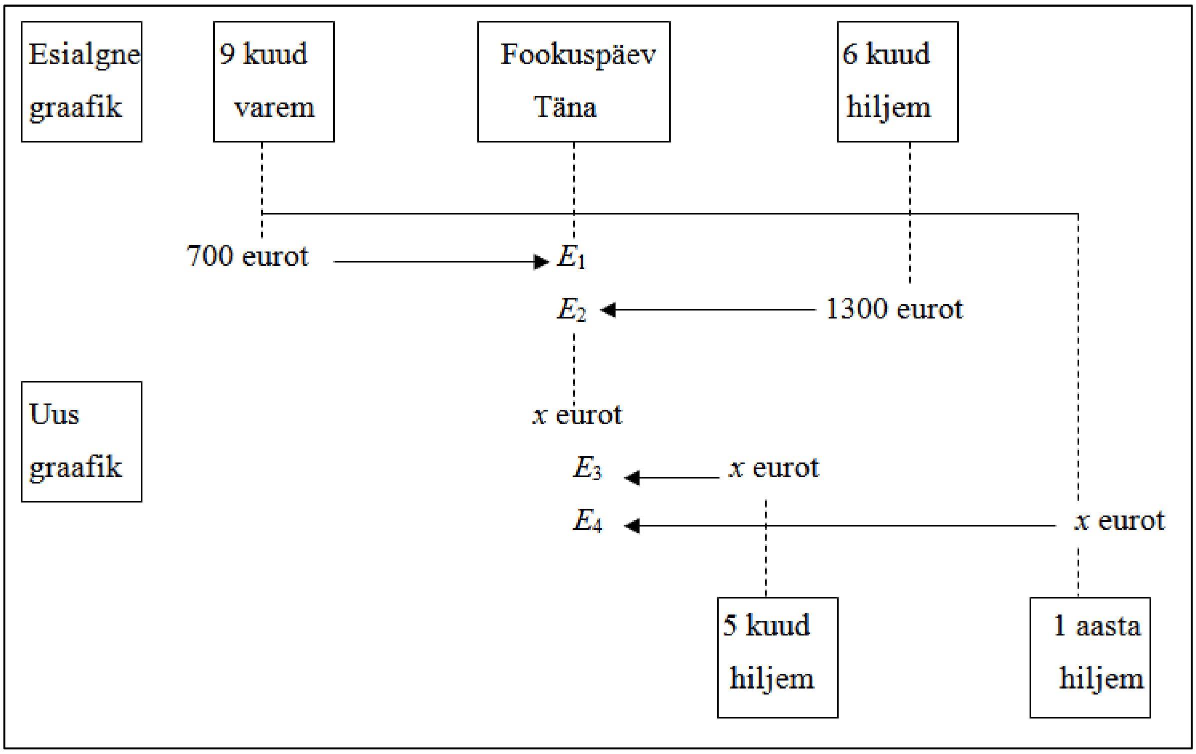
$$E_2 = \frac{S_2}{1 + r \cdot t} = \frac{440}{1 + 0,08 \cdot \dfrac{4}{12}} = 428,57 \quad \text{eurot.}$$

Vastus: Riina peaks Kirstilt saama ühekordse maksena 638,4 + 428,57 = 1064,97 eurot. #

Näide 2.3.5. Andi sõlmis aasta tagasi laenulepingu, mille kohaselt pidi ta laenu kustutama kahe osamaksega: 700 eurot 9 kuud tagasi ja 1300 eurot 6 kuu pärast. Kümme kuud tagasi soostus laenuandja uue maksegraafikuga, mille kohaselt pidi Andi tasuma võla kolmes võrdses osas: täna, viie kuu pärast ja ühe aasta pärast. Kui suur on viimati kokku lepitud osamakse, kui intressimäär oli 15% kapitalisatsiooniga iga kuu lõpus?

Lahendus.

Olgu otsitava osamakse suurus x. Kanname olulised andmed joonisel 2.3.6 näidatud skeemile.



Joonis 2.3.6. Näites 2.3.5 esitatud ülesande lahendusskeem.

Kuna kapitalisatsioon on iga kuu lõpus, siis

$$i = \frac{15\%}{12} = 1,25\% = 0,0125.$$

Järelikult esialgse graafiku järgi planeeritud maksetega vastavalt ekvivalentsed maksed on

$$E_1 = P \cdot (1+i)^n = 700 \cdot (1 + 0,0125)^9 = 782,80 \quad \text{eurot,}$$

$$E_2 = \frac{S}{(1+i)^n} = \frac{1300}{(1+0{,}0125)^6} = 1206{,}63 \text{ eurot.}$$

Uue graafiku järgi toimuvate maksetega ekvivalentsed maksed on *x* (vastab fookuspäevale),

$$E_3 = \frac{S}{(1+i)^n} = \frac{x}{(1+0{,}0125)^5} = 0{,}939777 \cdot x \text{ eurot,}$$

$$E_4 = \frac{S}{(1+i)^n} = \frac{x}{(1+0{,}0125)^{12}} = 0{,}861509 \cdot x \text{ eurot.}$$

Kuna finantsilise ekvivalentsuse printsiibi kohaselt peab fookuspäeval uue graafiku maksetega ekvivalentsete osamaksete summa olema võrdne vana graafiku maksetega ekvivalentsete maksete summaga, siis saame võrrandi

$$x + 0{,}939777 \cdot x + 0{,}861509 \cdot x = 782{,}80 + 1206{,}63$$

ehk

$$2{,}801286 \cdot x = 1989{,}43,$$

mistõttu

$$x = \frac{1989{,}43}{2{,}801286} = 710{,}18 \text{ eurot.}$$

Vastus: otsitava osamakse suurus on 710,18 eurot. #

2.3.3. Võlakirjad ja diskonteerimine

Antud alateemas tutvume võlakirjadega seonduvate olulisimate finantstehingutega.

Võlakirjaks (*promissory note* või *loan certificate*) nimetatakse kirjalikku dokumenti, milles üks lepingu osapool lubab kindlal kuupäeval teisele osapoolele maksta kindla rahasumma.

Võlakiri võib olla intressi kandev (*internest-bearing note*) või intressi mittekandev (*non-interest-bearing note*). Vaatleme intressi kandvat võlakirja. Võlakirjale märgitakse

- väljaandmise kuupäev (*issue date*),
- võlakirja periood (*term of the note*), mis näitab kui pikaks ajaks on võlakiri välja antud,
- tähtpäev (*due date* või *date of maturity*), st kuupäev, millal toimub võlakirjale märgitud maksekohustuse täitmine, tähtpäev on kolm päeva peale võlakirja perioodi lõppemist,

- võlakirja nimiväärtus (*face value*),
- aastaintressimäär (*rate of annual interest*), millega arvutatakse lihtintress, mida nimiväärtus teenib.

Võlakirja tähtpäevaväärtus on nimiväärtuse ja intresside summa. Selle arvutamiseks kasutatakse tähtpäevaväärtuse arvutamise valemeid

$$S = P \cdot (1 + r \cdot t) \text{ ja } S = P \cdot (1 + i)^n,$$

kus

S on võlakirja tähtpäevaväärtus,

P võlakirja nimiväärtus,

r (i) aastane intressimäär, mida nimiväärtus teenib,

t (n) intresside arvutamise periood, st väljaandmise päeva ja tähtpäeva vaheline ajavahemik (vastavalt kapitalisatsioonide arv väljaandmise päeva ja tähtpäeva vahel).

Märkus 2.3.3. Juhul, kui võlakiri on intressi mittekandev, on selle nimiväärtuseks tähtpäevaväärtus. Võlakirja ostja ehk investor saab tulu sellest, et ta maksab võlakirja väljaandjale võlakirjale märgitud nimiväärtusest vähem. See tähendab, et mingi kokkulepitud intressimäära alusel arvutatakse võlakirja nüüdisväärtus väljaandmise kuupäeval, st antud juhul nüüdisväärtus ei lange kokku nimiväärtusega.

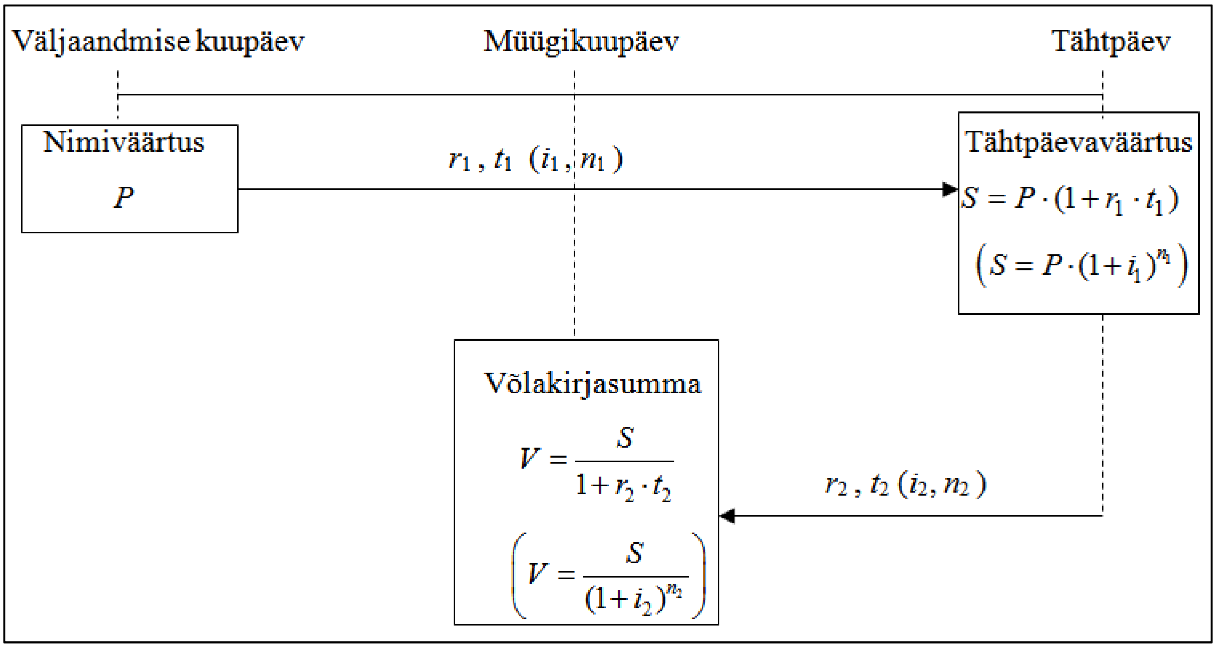
Võlakirjad on kaubeldavad, st väljaandmise kuupäeva ja tähtpäeva vahel saab võlakirja valdaja võlakirja maha müüa. Harilikult on müümise põhjuseks see, et võlakirja valdaja soovib saada raha enne võlakirja tähtaja saabumist.

Hinda, mille võlakirja omanik selle müügist saab, nimetatakse võlakirjasummaks (*proceeds of the note*).

Võlakirjasumma arvutamise võib intressi teeniva võlakirja puhul joonisel 2.3.7 esitatud skeemi kohaselt jaotada kaheks etapiks.

Esimene etapp. Nimiväärtus P teenib intressi intressimääraga r_1 (i_1) (mis on fikseeritud ka võlakirjal) ajaperioodi t_1 (vastavalt n_1) jooksul. Valemiga $S = P \cdot (1 + r_1 t_1)$ (või vastavalt $S = P \cdot (1 + i_1)^{n_1}$) arvutatakse siis tähtpäevaväärtus.

Teine etapp. Müügikuupäeval peab võlakirja valdaja leppima selle hinnaga, mis arvutatakse tähtpäevaväärtusest turul sel hetkel valitseva intressimäära r_2 (i_2) järgi, st võlakirjasummaks on tähtpäevaväärtuse S nüüdisväärtus V müügikuupäeval (st t_2 (n_2) aastat enne tähtpäeva), mis sõltub turul valitsevast intressimäärast r_2 (i_2). Kuna võimalikul ostjal on rahaturul võimalik



Joonis 2.3.7. Võlakirja summa arvutamine intressi teeniva võlakirja puhul.

valida erinevate võimaluste vahel, siis ta lihtsalt ei ole nõus väärtusest r_2 (i_2) väiksema intressimääraga; võlakirja müüja aga pole nõus väärtusest r_2 (i_2) suurema intressimääraga, kuna vastavalt turul valitsevale olukorrale on tal võimalik leida ostja, kes nõustub intressimääraga r_2 (i_2).

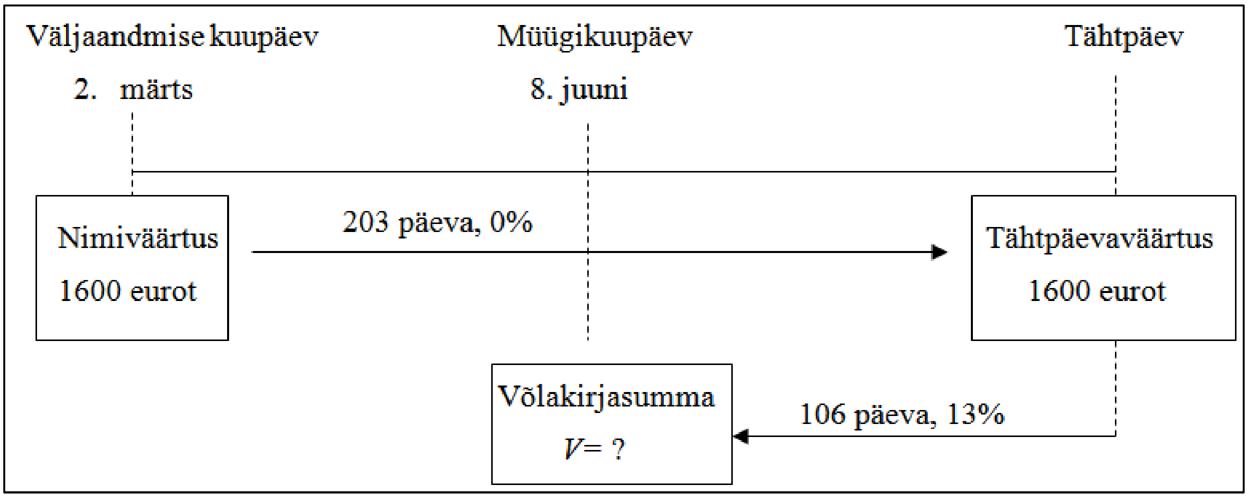
Ülalkirjeldatud protsessi ehk nüüdisväärtuse arvutamist müügikuupäeval (kasutades sel päeval turul kehtivat intressimäära) võlakirja tähtpäevaväärtuse järgi nimetatakse **harilikuks** ehk **lihtsaks diskonteerimiseks** (*simple discounting*). Diskonteerimisel kasutatavat intressimäära nimetatakse ka **diskontomääraks** (*discount rate/ rate of discount*) ning vahet tähtpäevaväärtuse ja võlakirjasumma vahel nimetatakse **diskontoks** (*discount*). Märgime, et lisaks harilikule diskonteerimisele tuntakse ka pangalist ehk kommertsdiskonteerimist, mida me käesolevas õppevahendis ei käsitle.

Kui tegemist on intressi mittekandva võlakirjaga, siis $S = P$, st I etapp jääb lihtsalt ära. Võlakirjasumma arvutatakse kohe II etapis kirjeldatud meetodi kohaselt.

Näide 2.3.6. Andi on 3. märtsil välja antud 200 päevase perioodiga intressi mittekandva võlakirja, mille nimiväärtus on 1600 eurot, valdaja. Ta müüs selle sama aasta 8. juunil. Milline oli saadud võlakirjasumma, kui diskontomääraks on lihtintressimäär 13%?

Lahendus.

Intresside arvutamise periood on 200 + 3 = 203 päeva. Alates võlakirja väljaandmisest kuni 8. juunini on 29 + 30 + 31 + 7 = 97 päeva, mistõttu 8. juunist kuni võlakirja tähtpäevani on 203 –



Joonis 2.3.8. Näites 2.3.6 esitatud ülesande lahendamise skeem.

97 = 106 päeva. Esitame arvutusteks vajalikud andmed joonisel 2.3.8. Kuna tegemist on intressi mittekandva võlakirjaga, siis nimiväärtuseks on tähtpäevaväärtus. Järelikult saab Andi võlakirja müügist

$$V = \frac{S}{1 + r \cdot t} = \frac{1600}{1 + 0{,}13 \cdot \frac{106}{360}} \approx 1541{,}01 \text{ eurot.}$$

Et ostja saab tähtpäeval võlakirja eest 1600 eurot, siis teenib ta võlakirja ostuga võlakirja tähtpäeval 1600 – 1541,01 = 58, 99 eurot tulu ehk diskonto on 58, 99 eurot.

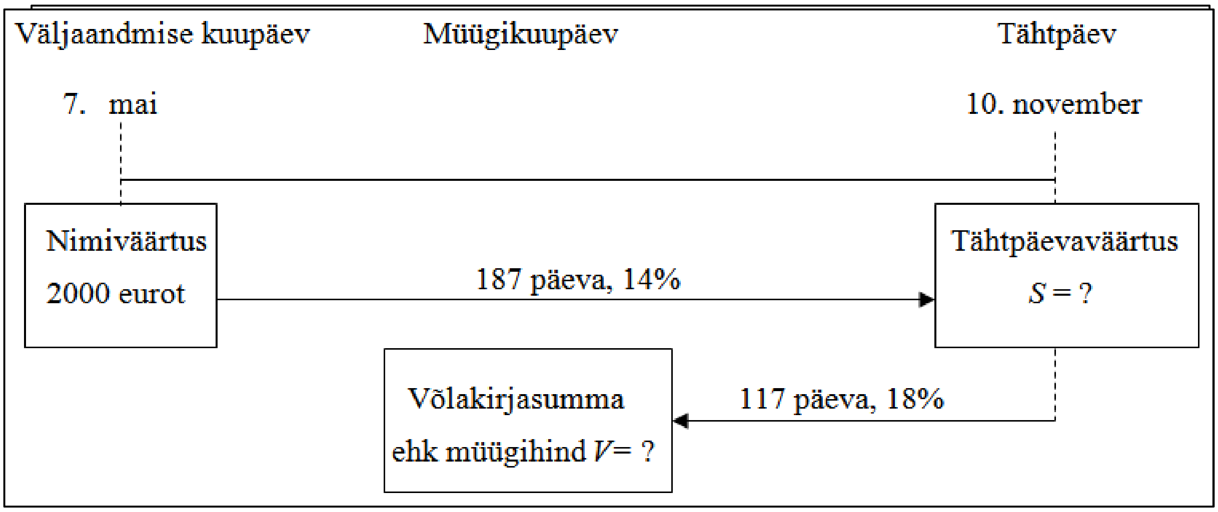
Vastus: Andi saab võlakirja müügist 1541,01 eurot. #

Märkus 2.3.4. Võib tekkida küsimus, et kas Andi sai eelmises näites võlakirja müües kahju. Vastus sellele küsimusele pole ühene. Kui Andi omandas võlakirja väiksema summa eest kui 1541,01 eurot, siis inflatsiooni arvestamata jättes Andi kahju ei kandnud, kui aga Andi omandas võlakirja suurema summa eest kui 1541,01 eurot, siis võlakirja müües pidi Andi taluma rahalist kaotust.

Näide 2.3.7. Kohvikupidaja rendib majaomanikult pinda ja maksab selle eest intresse kandva võlakirjaga, nimiväärtusega 2000 eurot, väljaandmise kuupäevaga 7. mai, perioodiga kuus kuud ning lihtintressimääraga 14%. Majaomanik müüs saadud võlakirja 70 päeva hiljem kommertspangale hinnaga, mis kindlustab sellele tulu 18%. Kui suure summa sai majaomanik kommertspangalt?

Lahendus.

Võlakirja tähtpäev on 10. november (7. novembrile lisatakse 3 päeva). Intresside arvutamise periood on 25 + 30 + 31 + 31 + 30 +31 + 9 = 187 päeva.



Joonis 2.3.9. Näites 2.3.7 esitatud ülesande lahendamise skeem.

Võlakirja müügipäeval jäi tähtpäevani 187 – 70 = 117 päeva. Esitame arvutusteks vajalikud andmed joonisel 2.3.9. Järelikult (diskontomääraks on 0,18)

$$S = P \cdot (1 + r \cdot t) = 2000 \cdot \left(1 + 0{,}14 \cdot \frac{187}{360}\right) \approx 2145{,}44 \text{ eurot},$$

$$V = \frac{S}{1 + r \cdot t} = \frac{2145{,}44}{1 + 0{,}18 \cdot \frac{117}{360}} = 2026{,}87 \text{ eurot.}$$

Vastus: majaomanik saab kommertspangalt 2026,87 eurot. #

Näide 2.3.8. Evald valdas võlakirja nimiväärtusega 3400 eurot, mis oli välja antud 01.09.2008 tähtpäevaga 01.06.2014 ning mis teenis intressi nominaalse intressimääraga 12% kapitalisatsiooniga iga kvartali lõpus. 01.12.2010 diskonteeris Evald võlakirja 15% nominaalse diskontomääraga kapitalisatsiooniga iga poolaasta lõpus. Millise summa Evald sai?

Lahendus.

Kanname andmed joonisel 2.3.10 olevale skeemile. Kõigepealt leiame võlakirja tähtpäevaväärtuse *S*. Selleks paneme tähele, et ajavahemik 01.09.2008 - 01.06.2014 sisaldab 5 aastat ja 9 kuud. Siis

$$n_1 = \left(5 + \frac{9}{12}\right) \cdot 4 = 23 \text{ kvartalit}, \quad i_1 = \frac{12\%}{4} = 3\% = 0{,}03, \quad P_1 = 3400,$$

$$S = P_1 \cdot (1 + i_1)^{n_1} = 3400 \cdot (1 + 0{,}03)^{23} = 6710{,}19 \text{ eurot.}$$

Nüüd leiame võlakirjasumma. Paneme tähele, et ajavahemik 01.12.2010 - 01.06.2014 sisaldab 3 aastat ja 6 kuud. Siis

$$n_2 = \left(3 + \frac{6}{12}\right) \cdot 2 = 7 \text{ poolaastat}, \quad i_1 = \frac{15\%}{2} = 7{,}5\% = 0{,}075, \; P_1 = 3400,$$

$$P_2 = \frac{S}{(1+i_2)^{n_2}} = \frac{6710{,}19}{(1+0{,}075)^7} = 4044{,}6 \text{ eurot.}$$

Vastus: Evald saab diskonteerimisel 4044,6 eurot. Diskonto on $6710{,}19 - 4044{,}6 = 2665{,}59$ eurot. #

2.3.4. Inflatsioon

Seni oleme käsitlenud ainult investeeringu tulevikuväärtuse nominaalset suurust. Investeeringu reaalset tulevikuväärtust mõjutab aga väga oluliselt inflatsioon ehk üldise hinnataseme tõus koos raha ostujõu kahanemisega.

Tehingu reaalse efektiivsuse arvutamisel tuleb arvestada raha ostujõu muutumist ajas. Kui raha ostujõud ajas kahaneb ehk kaupade hinnad tõusevad, on tegemist **inflatsiooniga** (*inflation*), kui aga raha ostujõud ajas kasvab ehk kaupade hinnad langevad, on tegu **deflatsiooniga** (*deflation*). Märkigem, et igapäevaelus on siiski peaaegu alati tegemist inflatsiooniga, deflatsiooni esineb suhteliselt harva vaid teatavat tüüpi majanduslanguse tingimustes.

Uurime arvulist näitajat, mis võimaldab ajas raha ostujõu muutust arvesse võtta. Sellise arvulise näitaja üldnimetuseks on **hinnaindeks** (*price index*) I_p, mis näitab mitu protsenti moodustab vaadeldava ajahetke hinnatase mingi muu ajahetke hinnatasemest.

Märgime, et mitmesugustest indeksitest räägitakse põhjalikumalt osas „3. Majandusstatistika“.

Hinnaindeks arvutatakse alati teataval ajahetkel kehtinud hinnataseme suhtes; nimetatud ajahetke (või perioodi) nimetame hinnaindeksi arvutamise baashetkeks. Oletame, et 1. jaanuar 2005 on võetud hinnaindeksi arvutamise baasiks. Kui soovitakse teada, milline on hinnaindeks 1. jaanuaril 2007, siis arvutatakse teatava kaupade ja teenuste ostukorvi hind V_1 2005. aasta 1. jaanuari seisuga ning sama ostukorvi hind V_2 2007. aasta 1. jaanuari seisuga. Otsitav hinnaindeks on siis

$$I_p = \frac{V_2}{V_1} \cdot 100 \tag{2.3.3}$$

Näide 2.3.9. Hinnaindeksi arvutamise baashetkel oli ostukorvi väärtus 1000 eurot, kahe aasta pärast maksis sama ostukorv 1200 eurot. Arvutada hinnaindeks.

Lahendus.

Kuna $V_1 = 1000$ ja $V_2 = 1200$, siis valemi (2.3.3) põhjal saame

$$I_p = \frac{1200}{1000} \cdot 100 = 120.$$

Esitatud näitest paneme tähele, et kahe aasta pärast kehtiv hinnatase moodustab baashetke hinnatasemest 120% ehk kahe aastaga on hinnad tõusnud 1,2 korda või 20%. Sel juhul ütleme, et inflatsioonimäär on 20%.

Inflatsioonimääraks (*rate of inflation / inflation rate*) nimetatakse hindade suhtelist juurdekasvu protsentides kindla ajavahemiku jooksul. Seega inflatsioonimäär on suurus, mis mõõdab inflatsiooni.

Järelikult inflatsioonimäär *h* avaldub valemiga

$$h = I_p - 100. \tag{2.3.4}$$

Valemist (2.3.4) saame avaldada hinnaindeksi:

$$I_p = 100 + h. \tag{2.3.5}$$

Näiteks, kui inflatsioonimäär on 30%, st *h* = 30, siis hinnaindeks on $I_p = 130$.

Inflatsioon on ahelprotsess, st hinnaindeks mitme perioodi kohta avaldub kujul

$$I_p = 100 \cdot \left(1 + \frac{h_1}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{h_2}{100}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{h_n}{100}\right), \tag{2.3.6}$$

kus $h_1, h_2, \ldots, h_n$ on n järjestikuse perioodi inflatsioonimäärad. Kui inflatsioonimäär on kõikide perioodide jooksul ühesugune, st $h_k = h$ iga $k = 1, \ldots, n$ korral, siis saame

$$I_p = 100 \cdot \left(1 + \frac{h}{100}\right)^n. \tag{2.3.7}$$

Näide 2.3.10. Aasta jooksul on iga kuu inflatsioonimäär 5%. Milline on hinnaindeks ja aastane inflatsioonimäär?

Lahendus.

Et *h* = 5 ja *n* = 12, siis valemi (2.3.7) põhjal

$$I_p = 100 \cdot (1 + 0,05)^{12} \approx 179,6.$$

Vastus: hinnaindeks on 179,6 ja aastane inflatsioonimäär on 79,6%, hinnatase on tõusnud aastaga 79,6%. #

Näide 2.3.11. Kolme aasta möödudes hinnaindeksi arvutamise baashetkest oli ostukorvi hind 1500 eurot ning vastav hinnaindeks 150. Arvutada ostukorvi väärtus hinnaindeksi arvutamise baashetkel.

Lahendus.

Kuna $V_2 = 1500$ ja $I_p = 150,$ siis valemist (2.3.3) avaldame ostukorvi väärtuse V_1 hinnaindeksi arvutamise baashetkel:

$$V_1 = \frac{V_2}{I_p} \cdot 100 \qquad (2.3.8)$$

ehk

$$V_1 = \frac{1500}{150} \cdot 100 = 1000 \text{ eurot. \#}$$

Vastus: ostukorvi väärtus hinnaindeksi arvutamise baashetkel oli 1000 eurot. #

Eelnevast näitest paneme tähele, et vaadeldaval hetkel on 1500 eurot sama ostujõuga, mis 1000 eurot kolm aastat tagasi. Teisiti öeldes, 1500 eurot täna on finantsiliselt ekvivalentne 1000 euroga kolm aastat varem. Esitatud arutluse põhjal saame kirja panna ka valemi rahasumma reaalse tulevikuväärtuse arvutamiseks. Olgu

S rahasumma nimiväärtusega *P* nominaalne tulevikuväärtus *n* aasta möödudes;

C rahasumma *P* reaalne tulevikuväärtus (*real futuure value*), st tulevikuväärtus, kus inflatsioon on arvesse võetud, st rahasumma *C* üks ühik on ostujõult võrdne rahasumma *P* ühe ühikuga.

Siis võttes valemis (2.3.8) $V_1 = C$ ja $V_2 = S,$ jõuame valemini

$$C = \frac{S}{I_p} \cdot 100. \qquad (2.3.9)$$

Näide 2.3.12. Eduardil on investeerimiskontol 1,5 miljonit eurot, millelt arvutatakse kolme kuu jooksul lihtintresse 28% nominaalse intressimääraga. Igakuine inflatsioon on vastavalt 2,5%, 2% ja 1,8%. Milline on Eduardi investeerimiskonto nominaalne ja reaalne tulevikuväärtus ning nominaalne ja reaalne juurdekasv?

Lahendus.

Et kolm kuud on 0,25 aastat, r = 0,28 ja P = 1,5 miljonit eurot, siis nominaalne tulevikuväärtus on

$$S = P\cdot(1+r\cdot t) = 1{,}5\cdot(1+0{,}28\cdot 0{,}25) = 1{,}605 \text{ miljonit eurot}$$

ja nominaalne juurdekasv

$$S - P = 105\,000 \text{ eurot.}$$

Kuna

$$h_1 = 2{,}5\%,\ h_2 = 2\%,\ h_3 = 1{,}8\%,$$

siis hinnaindeks

$$I_p = 100\cdot\left(1+\frac{h_1}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{h_2}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{h_3}{100}\right) = 100\cdot 1{,}025\cdot 1{,}02\cdot 1{,}018$$

ning reaalne tulevikuväärtus on valemi (2.3.9) põhjal

$$C = \frac{S}{I_p}\cdot 100 = \frac{1{,}605}{1{,}025\cdot 1{,}02\cdot 1{,}018} = 1{,}508 \text{ miljonit eurot}$$

ja reaalne juurdekasv $C - P = 1508000 - 1500000 = 8000$ eurot. #

Näide 2.3.13. Olgu 2004. ja 2008. aasta hinnaindeksid baashetke 1. jaanuar 2005 suhtes vastavalt 88 ja 116. Milline summa omas 2004. aasta 1. jaanuaril sama ostujõudu kui 1000 eurot 2008. aasta 1. jaanuaril?

Lahendus.

Olgu otsitav summa P_{2004}. Tähistame

$$P_{2008} = 1000,\ I_{p,2004} = 88,\ I_{p,2008} = 116.$$

Siis võrreldavate rahasummade suhe peab olema võrdne vastavate hinnaindeksite suhtega, st peab kehtima võrdus

$$\frac{P_{2004}}{P_{2008}} = \frac{I_{p,2004}}{I_{p,2008}} \quad \text{ehk} \quad \frac{P}{1000} = \frac{88}{116},$$

millest avaldame

$$P = \frac{88}{116}\cdot 1000 = 758{,}62 \text{ eurot. \#}$$

Vastus: 1. jaanuaril 2004 on sama ostujõuga nagu 1000 eurot 1. jaanuaril 2008. aastal 758,62 eurot. #

Eesti Statistikaameti kodulehel on „Ostujõu kalkulaator“, mis võimaldab võrrelda mistahes rahasumma ostujõudu erinevatel aastatel http://www.stat.ee/ostujou-kalkulaator.

Kas on võimalik, et reaalne juurdekasv osutub negatiivseks? Uurime püstitatud küsimust lähemalt. Asendades lihtintresside korral valemi $S = P \cdot (1 + r \cdot t)$ valemisse (2.3.9), saame

$$C = P \cdot \frac{1 + r \cdot t}{I_p} \cdot 100.$$

Järelikult juurdekasv $C - P$ on

negatiivne, kui $1 + r \cdot t < \frac{I_p}{100}$ ning

positiivne (ehk siis toimub tegelik juurdekasv), kui $1 + r \cdot t > \frac{I_p}{100}$.

Liitintresside korral (eeldame ühesugust igakuist inflatsiooni) saame valemite $S = P(1+i)^n$, (2.3.7) ja (2.3.9) põhjal, et

$$C = P \cdot \frac{(1+i)^n}{\left(1 + \frac{h}{100}\right)^n} = P \cdot \left(\frac{1+i}{\left(1 + \frac{h}{100}\right)} \right)^n$$

Seepärast saame positiivse, st reaalse ehk tegeliku juurdekasvu $C - P$ ainult juhul, kui igakuine inflatsioonimäär on väiksem kui intressimäär, st $h < 100 \cdot i$ (siin on h protsentides, i aga antud osamäärana).

ÜLESANDED

2.3.1. Leida investeeringu nüüdisväärtus 7 kuud enne selle lõpptähtaega, kui investeeringu tähtpäevaväärtus on 3500 eurot ja lihtintressimäär 9%.

2.3.2. Jürgen võib osta lennupiletid täna 450 eurot eest või kolm kuud hiljem 480 eurot eest. Milline variant on Jürgenile rahaliselt kasulikum, kui Jürgenil on võimalik 450 eurot kolmeks kuuks välja laenata lihtintressimääraga 14%?

2.3.3. Kaspar peab lepingu kohaselt tasuma võla 400 eurot täna, kuid rahapuudusel palub ta lükata tasumise aega viis kuud edasi. Millise summa peab maksma Kaspar viie kuu pärast, kui lihtintressimäär on 12%?

2.3.4.* Juhan peab võla kustutama kahe võrdse 600 euro suuruse osamaksega vastavalt kolme ja kuue kuu möödudes alates tänasest. Kui suur makse kustutaks võla täna, kui lihtintressimäär on 10%?

2.3.5.** Olav on sõlminud laenulepingu, mille kohaselt ta peab laenu kustutama kahe osamaksega: 1000 eurot 3 kuud peale lepingu sõlmimist ja 2000 eurot 9 kuud peale lepingu sõlmimist. Kaks kuud peale lepingu sõlmimist lepiti aga kokku, et Olav kustutab võla ühe maksega pool aastat hiljem peale esialgse lepingu sõlmimist. Kui suure summa peab Olav maksma pool aastat peale lepingu sõlmimist, kui aasta lihtintressimäär on 14% aastas ja fookuspäev on samuti pool aastat peale lepingu sõlmimist? Milline oli võla põhisumma?

2.3.6.** Gunnar võttis 500 eurot laenu kolm kuud tagasi ning 800 eurot täna. Lepingu järgi peab ta esimese tagasimakse 700 eurot tegema tänasest ühe kuu pärast ning nelja kuu pärast toimuva teise tagasimaksega kustutama kogu võla. Milline on teise tagasimakse suurus, kui fookuspäev on täna ja lihtintressimäär on 12%?

2.3.7.** Randel sõlmis kuus kuud tagasi laenulepingu, mille kohaselt pidi ta laenu kustutama kahe osamaksega: 500 eurot 100 päeva tagasi ja 900 eurot 60 päeva pärast. Viis kuud tagasi soostus laenuandja uue maksegraafikuga, mille kohaselt Randel pidi tasuma võla kolmes võrdses osas: täna, 80 päeva hiljem ja 150 päeva hiljem. Kui suur on viimati kokku lepitud osamakse, kui aasta lihtintressimäär oli 15% ning fookuspäevaks valiti tänane päev?

2.3.8.** Laen 3000 eurot kustutatakse kolme võrdse osamaksega vastavalt kolme, kuue ja üheksa kuu pärast. Kui suur on see osamakse, kui lihtintressimäär on 15% ja fookuspäevaks valiti tänane päev?

2.3.9.** Seitse kuud tagasi laenas Adolf Roobertilt 2000 eurot, mille nõustus tagasi maksma kahe osamaksega, mille nimiväärtused on vastavalt 1200 eurot ja 800 eurot, kusjuures esimene osamakse pidi toimuma 9 kuud peale laenu saamist ja teine 1 aasta peale laenu saamist. Lisaks osamaksete nimiväärtustele peab Adolf maksma Roobertile veel intressi aastase lihtintressimääraga 14%. Täna palus Adolf Roobertil nõustuda lubatud kahe makse asemel ühe maksega, mis toimuks 10 kuud peale laenu saamist. Millise summa peaks Roobert 10 kuu pärast Adolfilt saama, kui turul valitsevaks lihtintressimääraks on täna 10% ja fookuspäevaks valiti päev 10 kuud peale laenu saamist?

2.3.10. Nelja aasta möödudes peaks Albert laenu kustutamiseks tasuma 3000 eurot. Kui suure summa peaks Albert laenu kustutamiseks tasuma a) täna, b) 7 aasta pärast eeldusel, et nominaalne intressimäär on 12% kapitalisatsiooniga igas kvartalis?

2.3.11.* 18 kuud tagasi laenas Adolf Andreselt teatava summa, mille nõustus tagasi maksma kahe osamaksega: 600 eurot 27 kuud peale laenu võtmist ja 500 eurot kolm aastat peale laenu võtmist, Täna palus Adolf Andresel nõustuda lubatud kahe makse asemel ühe maksega, mis toimuks 30 kuud peale laenu saamist. Millise summa peaks Andres ühe aasta pärast Adolfilt saama, kui turul valitsevaks nominaalseks intressimääraks on täna 14% ühe kapitalisatsiooniga igas kvartalis?

2.3.12.* Väikefirma peab võetud laenu kustutamiseks tasuma 1500 eurot täna, 2500 eurot kahe aasta pärast ja 4000 eurot kuue aasta pärast. Kui suure ühekordse maksega saaks see firma laenu kustutada nelja aasta pärast, kui nominaalne intressimäär on 9% kapitalisatsiooniga igas poolaastas?

2.3.13.** Ettevõte pidi 10 kuu eest sõlmitud lepingu järgi kustutama laenu kahe osamaksega: 2800 eurot täna ja 4000 eurot üheksa kuu pärast koos intressiga, mida arvestati nominaalse intressimääraga 11% igakuise kapitalisatsiooniga. Täna asendati see maksegraafik uue graafikuga, mille kohaselt ettevõte peab maksma 3500 eurot kuue kuu pärast ja 18 kuu pärast toimuva maksega kustutama kogu ülejäänud võla. Leida viimase osamakse suurus, kui nominaalne intressimäär on täna 15% igakuise kapitalisatsiooniga?

2.3.14.** Harri sõlmis aasta tagasi laenulepingu, mille kohaselt pidi ta laenu kustutama kahe osamaksega: 800 eurot seitse kuud tagasi ja 1300 eurot üheksa kuu pärast. Kümme kuud tagasi soostus laenuandja uue maksegraafikuga, mille kohaselt Harri pidi tasuma võla kolmes võrdses osas: täna, kaheksa kuu pärast ja ühe aasta pärast. Kui suur on viimati kokku lepitud osamakse, kui intressimäär oli 12% kapitalisatsiooniga iga kuu lõpus?

2.3.15. Võlakiri nimiväärtusega 600 eurot anti välja 07.08.2011 tähtpäevaga 11.02.2012 ning nimiväärtus teenis intressi lihtintressimääraga 12% aastas. Mis on selle võlakirja tähtpäevaväärtus? Kasutati süsteemi 365/360.

2.3.16. Võlakiri nimiväärtusega 1500 eurot anti välja 08.06.2010 perioodiga üheksa kuud ning lihtintressimääraga 15% aastas. Mis on selle võlakirja tähtpäevaväärtus?

2.3.17. Seitsmekuulise perioodiga võlakirja, mis oli antud välja 1.märtsil 2008 ning teenis intressi lihtintressimääraga 12% aastas, tähtpäevaväärtus oli 750 eurot. Kui suur oli selle võlakirja nimiväärtus?

2.3.18. Viiekuulise perioodiga intressi mittekandev võlakiri nimiväärtusega 400 eurot, mis oli antud välja 1.märtsil 2010, diskonteeriti 1. juunil. Milline oli võlakirjasumma ning kui suur oli diskonto, kui diskontomääraks oli 12% lihtintressimäär? Kasutati süsteemi 365/360.

2.3.19.* 13% lihtintressimääraga intressi kandev võlakiri nimiväärtusega 900 eurot anti välja 3. mail ja diskonteeriti 15. juunil 15% lihtintressimääraga. Leida võlakirjasumma ja diskonto, kui võlakirja tähtpäev oli 7.septembril samal aastal. Kasutati süsteemi 365/360.

2.3.**20.** Andrus on 3. aprillil välja antud 220 päevase perioodiga intressi mittekandva võlakirja, mille nimiväärtus on 1600 eurot, valdaja. Ta müüs selle sama aasta 8. juunil. Milline oli saadud võlakirjasumma, kui diskontomääraks oli 11% lihtintressimäär? Kasutati süsteemi 365/360.

2.3.21.* Koosolekute korraldaja rendib majaomanikult ruume ja maksab selle eest intresse kandva võlakirjaga, mille nimiväärtus on 1200 eurot, väljaandmise kuupäev on 13. mai, periood kuus kuud ning mis teenib intressi lihtintressimääraga 15%. Majaomanik müüs saadud võlakirja 90 päeva hiljem finantsasutusele hinnaga, mis kindlustab sellele tulu 19%. Kui suure summa sai majaomanik finantsasutuselt? Kasutati süsteemi 365/360.

2.3.22. Andrus diskonteeris nimiväärtusega 3000 eurot intressi mittekandva võlakirja 44 kuud enne tähtpäeva 12% intressimääraga kapitalisatsiooniga igas kvartalis. Millise summa Andrus sai ning kui suur oli diskonto?

2.3.23. Julius diskonteeris intressi mittekandva võlakirja, mille tähtpäev oli 1. august 2013 ja nimiväärtus 4500 eurot 1. juunil 2010 igakuise kapitalisatsiooniga intressimääraga 10%. Millise summa Julius sai ning kui suur oli diskonto? Kasutati süsteemi 360/360.

2.3.24. Leopold diskonteeris 1. novembril 2008 võlakirja, mille tähtpäevaväärtus oli 6000 eurot ja tähtpäev 1. veebruar 2012 intressimääraga 10% kord kvartalis toimuva kapitalisatsiooniga. Millise summa Leopold sai ning kui suur oli diskonto? Kasutati süsteemi 360/360.

2.3.25.* Aleks valdas võlakirja nimiväärtusega 2700 eurot, mis oli välja antud 01.06.2009 tähtpäevaga 01.09.2015 ning mis teenis intressi nominaalse intressimääraga 13% kapitalisatsiooniga iga kvartali lõpus. 01.12.2010 diskonteeris Aleks võlakirja 16% nominaalse intressimääraga kapitalisatsiooniga iga kvartali lõpus. Millise summa Aleks sai? Kasutati süsteemi 360/360.

2.3.26.** Oskar omandas võlakirja, mille kohaselt talle pidi makstama kolme aasta pärast 4000 eurot koos lisandunud intressidega, mida arvestatakse nominaalse intressimääraga 13% ning kapitalisatsioonid on iga kuu lõpus. Mingil päeval enne lepingu tähtpäeva müüs Oskar võlakirja

4400 eurot eest maha. Mitu päeva enne tähtpäeva Oskar müüs võlakirja, kui see diskonteeriti turul valitseva nominaalse intressimäära 10% järgi, kus kapitalisatsioonid on iga kvartali lõpus?

2.3.27. ** Investeeringu põhisumma on P ning intressimäär s; k_1 aasta pärast on lõppsumma S_{k_1}, $k_1 + k_2$ aasta pärast aga $S_{k_1+k_2}$. Olgu A_{k_1} rahasumma $S_{k_1+k_2}$ nüüdisväärtus k_1 aastat pärast investeeringu algust. Näidata, et iga $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$ korral

a) $S_{k_1} \neq A_{k_1}$, kui s on lihtintressimäär;

b) $S_{k_1} = A_{k_1}$, kui s on liitintressimäär.

2.3.28. Oletame, et täna maksab teatav teenus 1000 eurot, kusjuures viimase nelja aasta jooksul on selle kauba hind kasvanud 1,4 korda. Milline on hinnaindeks nelja aasta taguse hinnataseme suhtes ning kui palju maksis sama kaup neli aastat tagasi?

2.3.29. Aasta jooksul on igakuine inflatsioonimäär 2%. Milline on hinnaindeks aasta alguskuupäeva hinnataseme suhtes ja aastane inflatsioonimäär?

2.3.30. Kui suur on hinnaindeks aasta alguskuupäeva hinnataseme suhtes ja aastainflatsioonimäär, kui esimese kuue kuu jooksul on igakuine inflatsioonimäär võrreldes eelneva kuuga 0,5% ja järgmise poolaasta inflatsioon on eelneva poolaasta lõpptasemega võrreldes 3%?

2.3.31.* Eduardil on investeerimiskontol 1500 eurot, millelt arvutatakse nelja kuu jooksul lihtintresse 25% nominaalse intressimääraga; igakuine inflatsioonimäär eelneva kuuga võrreldes on vastavalt 1,5%, 2%, 1,3% ja 0,8%. Milline on Eduardi investeerimiskonto nominaalne ja reaalne tulevikuväärtus ning nominaalne ja reaalne juurdekasv?

2.3.32.* Joosepil on kontol 2000 eurot, millelt arvutatakse kahe aasta jooksul intressi nominaalse intressimääraga 2,5% igakuise kapitalisatsiooniga. Milline on Joosepi konto nominaalne ja reaalne tulevikuväärtus ning nominaalne ja reaalne juurdekasv, kui esimesel aastal oli inflatsioonimäär 5% ja teisel aastal 7%?

2.3.33. Firmal on kontol 500 000 eurot, millelt arvutatakse kuue kuu jooksul lihtintresside meetodiga intressi aastaintressimääraga 12%. Milline on firma reaalne tulevikuväärtus ning reaalne juurdekasv, kui igakuine inflatsioonimäär võrreldes eelneva kuuga on 0,8%?

2.3.34. Olgu 2006. ja 2011. aasta hinnaindeksid 1. jaanuari seisuga baashetke 1. jaanuar 2008 suhtes vastavalt 88 ja 142. Milline summa omas 2006. aasta 1. jaanuaril sama ostujõudu kui 400 eurot 2011. aasta 1. jaanuaril?

2.3.35. Millise 3 aasta taguse summaga on tänane 20 000 eurot sama ostujõuga, kui iga-aastane inflatsioonimäär on olnud 5%?

KIRJANDUST LUGEMISEKS

Eamets, R., Kaasa, A., Kaldaru, H., Trasberg, V. Sissejuhatus majandusteooriasse. Tartu , Tartu Ülikooli Kirjastus, 2005. Lk 196-198.

Ettevõtlikkusest ettevõtluseni: gümnaasiumiõpik. Toimetajad T. Saal jt. Tallinn, SA Teadlik Valik, 2012. Lk 61-62.

Kaasa, A. Majandusteaduse matemaatilised alused. Tartu, Tartu Ülikooli Kirjastus, 2002. Lk 185-186.

Kerem, K., Randveer, M. Mikro- ja makroökonoomika põhikursus. 5., parandatud ja täiendatud trükk, Tallinn, Külim, 2007. Lk 126-129.

Majanduse ABC / Arrak, A., jt. III trükk. Tartu: Avatar OÜ, 2002. Lk 189-191.

Majandusõpik gümnaasiumile. Koostajad ja autorid L. Kulu jt. Tallinn, Junior Achievement Eesti AS, 2011. Lk 95, 100, 172-173.

Telgmaa, A., Rahandusküsimusi koolimatemaatikas. Tallinn, Kirjastus „Avita“, 1994. Lk 27-36.

2.4. Annuiteedid

Antud osas käsitleme finantstehinguid, mis sisaldavad võrdsete ajavahemike tagant toimuvaid võrdse suurusega makseid. Selliste tehingute näitena võime nimetada mitmesuguseid laene, liisingumakseid, kindlustust, pensionide ja palkade maksmist jne.

Perioodiliste laekumiste (sisse- või väljamaksete) jada, mis koosneb võrdsete ajavahemike tagant toimuvatest võrdse suurusega rahasummade laekumistest ehk osamaksetest, nimetatakse **annuiteediks** (*annuity*)**.**

Ajavahemikku kahe järjestikuse osamakse vahel nimetatakse **annuiteedi makseperioodiks** (*payment period* / *payment interval*)**,** ajavahemikku annuiteedi esimese makseperioodi algusest kuni viimase makseperioodi lõpuni nimetatakse **annuiteedi tähtajaks** (*term of annuity*).

2.4.1. Lihtne tava- ja avanssannuiteet, nende tulevikuväärtused ja nüüdisväärtused

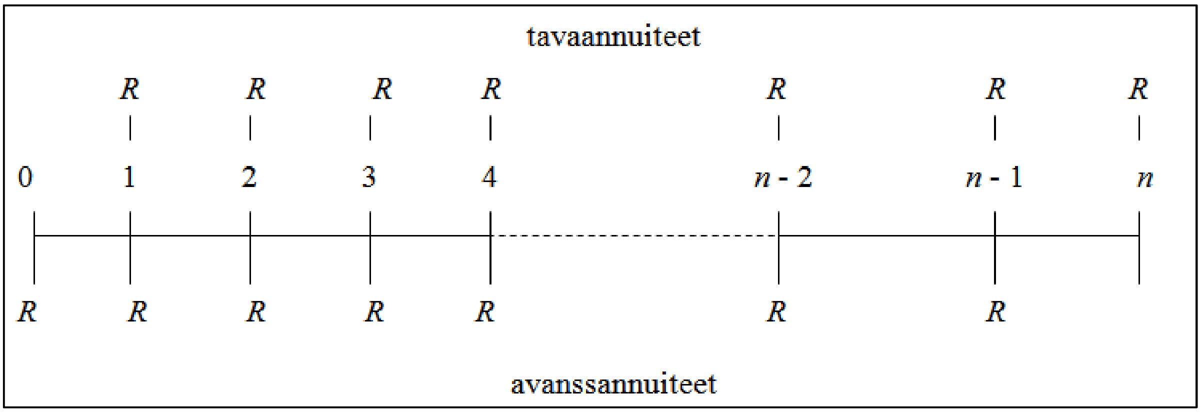
Kui annuiteedi osamaksed toimuvad makseperioodide lõpus, siis sellist annuiteeti nimetatakse **tavaannuiteediks** ehk **harilikuks annuiteediks** (*ordinary annuity*)**.** Kui aga osamaksed toimuvad makseperioodide algul, siis sellist annuiteeti nimetatakse **avanssannuiteediks** (*annuity due*)**.**

Olgu

n annuiteedi makseperioodide ehk osamaksete arv (*number of payment intervals*),

R annuiteedi osamakse (*size of periodic payment*).

Kujutame nii tava- kui ka avanssannuiteeti joonisel 2.4.1 toodud skeemil.



Joonis 2.4.1. Tava- ja avanssannuiteedi maksegraafikud.

Tähistagu

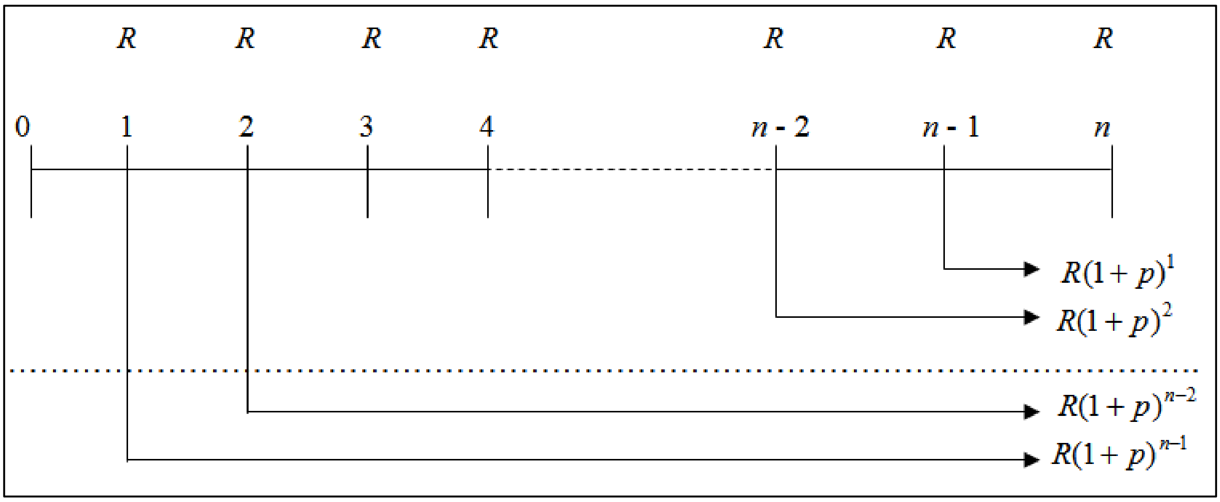
p intressimäära annuiteedi makseperioodi kohta (*interest rate per payment period*),

i intressimäära kapitalisatsiooniperioodi kohta (*interest rate per compounding* (*conversion period*)) (nagu varemgi).

Annuiteedi tulevikuväärtuseks (*amount of annuity*) nimetatakse selle kõigi osamaksetega ekvivalentsete maksete summat annuiteedi tähtaja lõpus.

Kui $p = i$, st kapitalisatsiooniperioodide sagedus ühtib makseperioodide sagedusega, siis annuiteeti nimetatakse **lihtsaks annuiteediks** (*simple annuity*)**.** Annuiteeti, mille makseperioodide sagedus ei ühti kapitalisatsioonide sagedusega, nimetatakse **üldiseks annuiteediks** (*general / complex annuity*). Meie käsitleme ainult lihtsaid annuiteete.

Vaatleme lihtsa tavaannuiteedi tulevikuväärtuse arvutamist. Kujutame osamaksete tulevikuväärtuste kujunemist joonisel 2.4.2 esitatud skeemil. Paneme tähele, et



Joonis 2.4.2. Lihtsa tavaannuiteedi osamaksete tulevikuväärtuste kujunemine.

esimene osamakse teenib intressi n - 1 makseperioodi jooksul, mistõttu selle tulevikuväärtuseks on $R \cdot (1+p)^{n-1}$,

teine osamakse teenib intressi n - 2 makseperioodi jooksul, mistõttu selle tulevikuväärtuseks on $R \cdot (1+p)^{n-2}$,

……………………………………………………………………………………………

$(n-2)$-ne osamakse teenib intressi kahe makseperioodi jooksul, mistõttu selle tulevikuväärtuseks on $R \cdot (1+p)^2$,

$(n-1)$-ne osamakse teenib intressi ühe makseperioodi jooksul, mistõttu selle tulevikuväärtuseks on $R \cdot (1+p)^1$,

n-is osamakse enam intressi ei teeni, mistõttu selle tulevikuväärtuseks on lihtsalt R.

Järelikult n makseperioodiga lihtsa tavaannuiteedi tulevikuväärtus S_n avaldub summana

$$S_n = R + R \cdot (1+p) + R \cdot (1+p)^2 + ...R \cdot (1+p)^{n-2} + R \cdot (1+p)^{n-1} \qquad (2.4.1)$$

Märkame, et tegemist on geomeetrilise jada n esimese liikme summaga, kus esimeseks liikmeks a ja rea teguriks q on vastavalt

$$a = R \quad \text{ja} \quad q = 1 + p.$$

Et geomeetrilise jada n esimese liikme summa S avaldub valemina

$$S = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

siis

$$S_n = R \cdot \frac{(1+p)^n - 1}{1 + p - 1},$$

mistõttu

$$S_n = R \cdot \frac{(1+p)^n - 1}{p} \qquad (2.4.2)$$

ehk

$$S_n = R \cdot s_{n,p}, \qquad (2.4.3)$$

kus suurust

$$s_{n,p} = \frac{(1+p)^n - 1}{p} \qquad (2.4.4)$$

nimetatakse **annuiteedi akumulatsiooniteguriks** (*compounding / accumulation factor for annuities*)**.**

Võrreldes tava- ja avanssannuiteeti, näeme joonisel 2.4.1 esitatud skeemilt, et avanssannuiteedi iga osamakse teenib intressi ühe perioodi kauem. Seepärast tuleb iga liidetav valemis (2.4.1) avanssannuiteedi tulevikuväärtuse saamiseks läbi korrutada teguriga 1 + *p*. Järelikult valemist (2.4.2) tuleneb, et avanssannuiteedi tulevikuväärtus S_n(avanss) avaldub kujul

$$S_n(\text{avanss}) = R \cdot \frac{(1+p)^n - 1}{p} \cdot (1+p). \qquad (2.4.5)$$

Vaatame nüüd, kuidas leida lihtsa **tavaannuiteedi nüüdisväärtust** (*present value of annuity*), milleks on annuiteedi kõigi osamaksetega vastavalt ekvivalentsete maksete summa annuiteedi alguspäeval. Selle leidmiseks on võimalik kasutada samasugust meetodit, mis tulevikuväärtuse leidmisel, kuid saab ka lihtsamalt. Nimelt saame ära kasutada asjaolu, et tulevikuväärtuse arvutamise valem (2.4.2) on teada. Olgu

A_n *n* makseperioodiga lihtsa tavaannuiteedi nüüdisväärtus.

Siis selle tulevikuväärtuse arvutamiseks saame kasutada liitintresside tulevikuväärtuse arvutamise valemit $S = P \cdot (1+i)^n$, kus

$$S = S_n, \quad i = p \quad \text{ja} \quad P = A_n,$$

saades nii seose

$$S_n = A_n \cdot (1+p)^n,$$

millest avaldame

$$A_n = \frac{S_n}{(1+p)^n}.$$

Kasutades valemit (2.4.2), võime kirjutada

$$A_n = R \cdot \frac{(1+p)^n - 1}{p \cdot (1+p)^n}$$

ehk

$$A_n = R \cdot \frac{1-(1+p)^{-n}}{p}. \tag{2.4.6}$$

Tähistades

$$a_{n,p} = \frac{1-(1+p)^{-n}}{p}, \tag{2.4.7}$$

saame valemi (2.4.6) ümber kirjutada kujul

$$A_n = R \cdot a_{n,p}. \tag{2.4.8}$$

Suurust $a_{n,p}$ nimetatakse **annuiteedi nüüdisväärtuse teguriks** (*present value factor* / *discount factor for annuities*)**.**

Panganduses on nii $a_{n,p}$ kui ka $s_{n,p}$ väärtuste kohta koostatud tabelid, kust saab erinevate *n* ja *p* väärtuste paaride jaoks leida vastavad akumulatsiooni ja nüüdisväärtuse tegurid.

Ülalöeldut arvestades on lihtne järeldada, et ka lihtsa avanssannuiteedi nüüdisväärtuse $A_n(\text{avanss})$ saame lihtsa tavaannuiteedi väärtusest, kui korrutame selle läbi teguriga $1 + p$, saades

$$A_n(\text{avanss}) = R \cdot \frac{1-(1+p)^{-n}}{p} \cdot (1+p). \tag{2.4.9}$$

Näide 2.4.1. Spordi toetuseks on loodud fond, mille jaoks kogutakse vahendeid lihtsa tavaannuiteedina. Selle annuiteedi tähtaeg on viis aastat ning nominaalne intressimäär 18,5% kapitalisatsiooniga iga aasta lõpus. Kui suur oli selle fondi tulevikuväärtus viie aasta pärast, kui iga aasta lõpus tehtav osamakse on 400 000 eurot? Kui suur oli selle annuiteedi nüüdisväärtus fondi loomise hetkel?

Lahendus.

Kuna

$$R = 400000, \quad p = i = 0{,}185 \ \text{ ja } \ n = 5,$$

siis vastavalt valemitele (2.4.2) ja (2.4.6) saame

$$S_5 = 400\,000 \cdot \frac{(1+0{,}185)^5 - 1}{0{,}185} \approx 2\,890\,000 \text{ eurot,}$$

$$A_5 = 400\,000 \cdot \frac{1-(1+0{,}185)^{-5}}{0{,}185} \approx 1\,236\,800 \text{ eurot.}$$

Vastus: fondi tulevikuväärtus oli $2\,890\,000$ eurot ja nüüdisväärtus $1\,236\,800$ eurot. #

Näide 2.4.2. Kui suur oleks näites 2.4.1 kirjeldatud annuiteedi tuleviku- ja nüüdisväärtus, kui lihtsa tavaannuiteedi asemel oleks tegemist lihtsa avanssannuiteediga?

Lahendus.

Vastavalt valemile (2.4.5) ja (2.4.2) saame, et

$$S_5(\text{avanss}) = S_5 \cdot (1+p) = 2\,890\,000 \cdot (1+0{,}185) = 3\,424\,650 \text{ eurot}$$

ning valemite (2.4.9) ja (2.4.6) põhjal leiame, et

$$A_5(\text{avanss}) = A_5 \cdot (1+p) = 1\,236\,800 \cdot (1+0{,}185) = 1\,465\,608 \text{ eurot.}$$

Vastus: fondi tulevikuväärtus oli $3\,424\,650$ eurot ja nüüdisväärtus $1\,465\,608$ eurot. #

Näide 2.4.3. Riina on kogunud raha, makstes eelneva kahe aasta jooksul iga kuu lõpus oma pangaarvele 200 eurot, mis teenib intressi nominaalse intressimääraga 9% kapitalisatsiooniga iga kuu lõpus. Milline on kogunenud summa ühe aasta pärast, kui ta jätkab samasuguste osamaksete tegemist?

Lahendus.

Siin

$$R = 200, \quad p = i = \frac{9\%}{12} = 0{,}75\% = 0{,}0075 \text{ ja } n = 36.$$

Järelikult on Riina arvele kogunenud ühe aasta pärast

$$S_{36} = 200 \cdot \frac{(1+0{,}0075)^{36} - 1}{0{,}0075} \approx 8230{,}54 \text{ eurot.}$$

Vastus: Riina arvele on kogunenud ühe aasta pärast $8230{,}54$ eurot. #

Näide 2.4.4. Evald on 20 aasta jooksul kogunud raha pensionifondi makstes iga poolaasta lõpus fondi 500 eurot, mis teenis esimese kaheksa ja poole aasta jooksul intressi nominaalse intressimääraga 7% kapitalisatsiooniga iga poolaasta lõpus ning järgneva 11 ja poole aasta jooksul nominaalse intressimääraga 9% kapitalisatsiooniga iga poolaasta lõpus. Milline on kogunenud summa 20 aastase perioodi lõpul?

Lahendus.

Kuna osamaksed ja kapitalisatsioonid toimuvad mõlemad iga poolaasta lõpus, siis

$$p_1 = i_1 = \frac{7\%}{2} = 3{,}5\% = 0{,}035 \text{ esimese 8,5 aastase perioodi jooksul,}$$

$$p_2 = i_2 = \frac{9\%}{2} = 4{,}5\% = 0{,}045 \text{ viimase 11,5 aastase perioodi jooksul}$$

Kuna intressimäär tähtaja jooksul muutus, siis lahendus koosneb neljast etapist:

I. Leiame tulevikuväärtuse S_{17} peale 17 esimest makseperioodi, st peale 8,5 aastat.

II. Leiame eelnevas etapis arvutatud summa S_{17} tulevikuväärtuse S annuiteedi viimase osamakse päeval ehk 11,5 aastat hiljem.

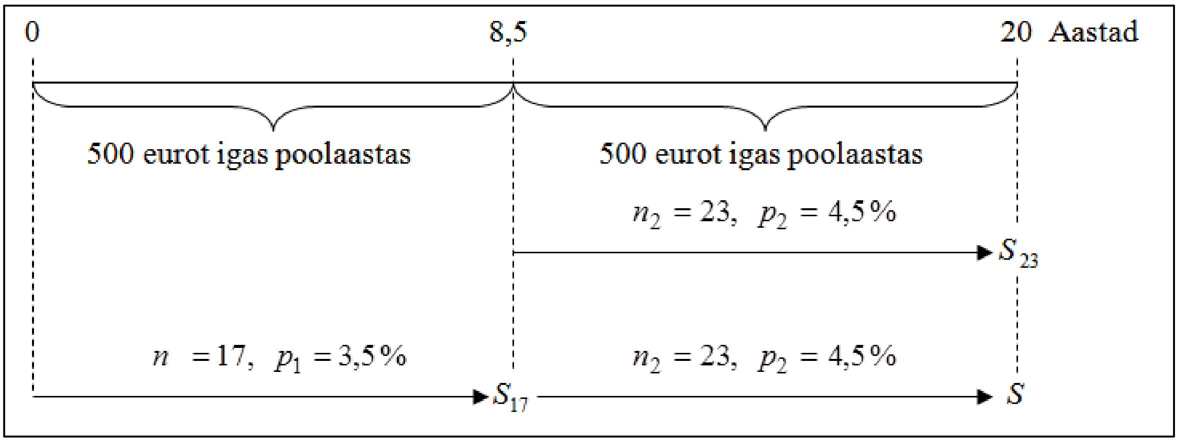
III. Leiame viimase 23 osamakse summaarse tulevikuväärtuse S_{23}.

IV. Leiame kogu annuiteedi tulevikuväärtuse, arvutades $S + S_{23}$.

Kirjeldame esitatud lahenduskäiku ka joonisel 2.4.3 antud skeemil. Arvutame:

$$S_{17} = 500 \cdot \frac{(1+0{,}035)^{17} - 1}{0{,}035} \approx 11352{,}51 \text{ eurot,}$$

$$S = P \cdot (1+i)^n = S_{17} \cdot (1+p_2)^{n_2} = 11352{,}51 \cdot (1+0{,}045)^{23} \approx 31244 \text{ eurot,}$$



Joonis 2.4.3. Näites 2.4.4 esitatud ülesande lahendusskeem.

$$S_{23} = 500 \cdot \frac{(1+0{,}045)^{23} - 1}{0{,}045} \approx 19468{,}51 \text{ eurot},$$

$$S + S_{23} = 31244 + 19468{,}51 = 50\,712{,}51 \text{ eurot.}$$

Vastus: Evald kogus 20 aastaga pensionifondi 50 712,51 eurot. #

Näide 2.4.5. Ako soovib panna täna fondi rahasumma, mis võimaldaks tema tütrel võtta järgneva 15 aasta jooksul iga kuu lõpus välja 200 eurot. Kui suur peaks see summa olema, kui raha teenib intressi nominaalse intressimääraga 12% kapitalisatsiooniga iga kuu lõpus?

Lahendus.

Antud juhul on tegemist 15 aastase tähtajaga lihtsa tavaannuiteedi (maksed makseperioodi lõpus ja maksete sagedus ühtib kapitalisatsioonide sagedusega) nüüdisväärtuse arvutamisega, kus

$$R = 200,\quad j = 12\%,\ m = 12,\quad p = i = \frac{12\%}{12} = 1\% = 0{,}01 \ \text{ ja } \ n = 15 \cdot 12 = 180.$$

Järelikult valemi (2.4.6) põhjal peaks Ako paigutama sellesse fondi

$$A_{180} = 200 \frac{1-(1+0{,}01)^{-180}}{0{,}01} \approx 16664{,}33 \text{ eurot.}$$

Vastus: Ako peaks paigutama sellesse fondi $16664{,}33$ eurot. #

Näide 2.4.6. Andi on kogunud raha pensionifondi, kus talle makstakse esimese 12 aasta jooksul 400 eurot iga kuu lõpus ja järgneva 15 aasta jooksul 500 eurot iga kuu lõpus. Milline on kõigi plaanitavate pensionimaksete nüüdisväärtus üks kuu enne esimese pensionimakse saamist, kui fondi paigutatud raha teenib intressi 9% nominaalse intressimääraga kapitalisatsiooniga iga kuu lõpus?

Lahendus.

Kuna maksed toimuvad iga kuu lõpus ja maksete sagedus ühtib kapitalisatsioonide sagedusega, siis on tegemist kahe lihtsa tavaannuiteediga, kus

$$p = i = \frac{9\%}{12} = 0{,}75\% = 0{,}0075.$$

Kirjeldame andmeid joonisel 2.4.4 esitatud skeemil. Antud skeemilt selgub, et lahenduskäik koosneb neljast etapist:

I. Leiame teise, 180 kuu pikkuse annuiteedi nüüdisväärtuse A_{180} hetkel 144.

II. Leiame eelnevas etapis arvutatud A_{180} jaoks nüüdisväärtuse P annuiteedi hetkel 0.

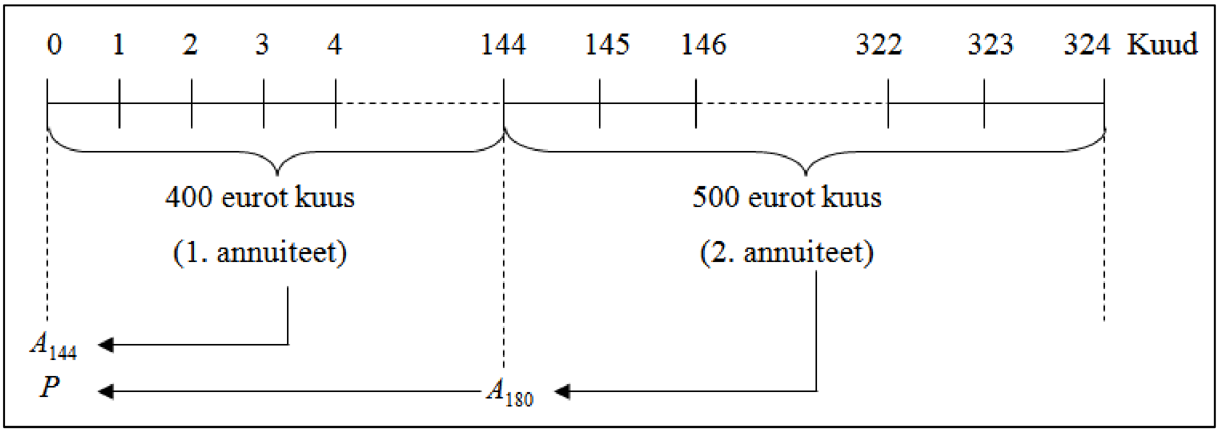
III. Leiame esimese, 144 kuu pikkuse annuiteedi nüüdisväärtuse A_{144} hetkel 0.

IV. Leiame kogu annuiteedi nüüdisväärtuse, arvutades $P + A_{144}$.

Arvutame:

$$A_{180} = 500 \cdot \frac{1-(1+0{,}0075)^{-180}}{0{,}0075} \approx 49296{,}70 \text{ eurot},$$

$$P = \frac{S}{(1+i)^n} = \frac{A_{180}}{(1+p)^{n_1}} = \frac{49296{,}70}{(1+0{,}0075)^{144}} = 16808{,}54 \text{ eurot},$$



Joonis 2.4.4. Näites 2.4.6 esitatud ülesande lahendusskeem.

$$A_{144} = 400 \cdot \frac{1-(1+0{,}0075)^{-144}}{0{,}0075} \approx 35148{,}44 \text{ eurot},$$

$$P + A_{144} = 16808{,}54 + 35148{,}44 = 51956{,}98 \text{ eurot.}$$

Vastus: kõigi plaanitavate pensionimaksete summaarne nüüdisväärtus on 51956,98 eurot. #

Näide 2.4.7. Manivaldil on võimalik valida, kas minna pensionile 60 aastaselt või 65 aastaselt. Kui Manivald valib esimese variandi, siis vähendatakse tema igakuist pensioni iga varem pensionile mindud kuu kohta 0,4%. Oletades, et Manivald elab 80 aastaseks, määrata milline pakutavatest variantidest on Manivaldile kasulikum, kui raha teenib intressi nominaalse intressimääraga 8,4% igakuise kapitalisatsiooniga.

Lahendus.

Kui Manivald läheb viis aastat varem pensionile, kahaneb tema igakuine pensionimakse

$$5 \cdot 12 \cdot 0{,}4\% = 24\% \text{ võrra.}$$

Järelikult, minnes 65 aastaselt pensionile, hakatakse talle maksma pensioni R eurot kuus, kui aga 60 aastaselt, siis $(1-0{,}24)R = 0{,}76R$ eurot kuus. Veel leiame, et

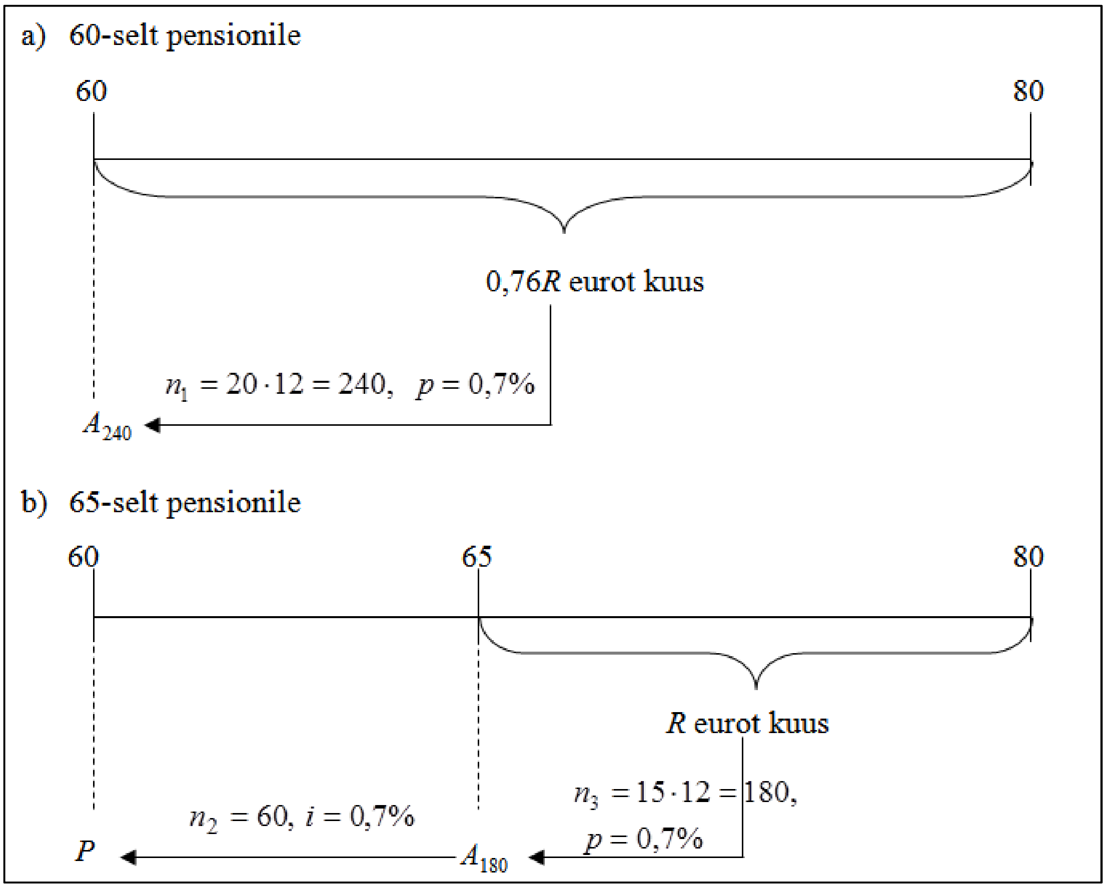
$$p = i = \frac{8{,}4\%}{12} = 0{,}7\% = 0{,}007\,.$$

Kirjeldame alternatiivseid variante joonisel 2.4.5 toodud skeemil arvestusega, et Manivald elab 80 aastaseks, tähistades kõigi 60-nda ja 80-nda eluaasta vahel toimuvate pensionimaksete nüüdisväärtuste summa ehk 20 aastase annuiteedi nüüdisväärtuse sümboliga A_{240}, kõigi 65-nda ja 80-nda eluaasta vahel toimuvate pensionimaksete nüüdisväärtuste summa ehk 15 aastase annuiteedi nüüdisväärtuse sümboliga A_{180} ning summa A_{180} nüüdisväärtuse hetkel, mil Manivald on 60 aastane, sümboliga P. Arvutame:

$$A_{240} = 0{,}7R \cdot \frac{1-(1+0{,}007)^{-240}}{0{,}007} \approx 81{,}25R \text{ eurot,}$$

$$A_{180} = R \cdot \frac{1-(1+0{,}007)^{-180}}{0{,}007} \approx 102{,}16R \text{ eurot,}$$

$$P = \frac{S}{(1+i)^{n}} = \frac{A_{180}}{(1+i)^{n_2}} = \frac{102{,}16}{(1+0{,}007)^{60}} = 67{,}22R \text{ eurot.}$$



Joonis 2.4.5. Näites 2.4.7 esitatud ülesande lahendusskeem.

Vastus: Manivaldil on kasulikum minna pensionile 60 aastaselt, sest $A_{240} > P$. #

2.4.2. Annuiteedi osamakse suuruse, tähtaja ja intressimäära arvutamine

Oletame, et annuiteedi tuleviku- ja nüüdisväärtuse valemites (2.4.2) ja (2.4.6) on S_n ja A_n teada. Kui ülejäänud kolmest komponendist R, p ja n on kaks teada, siis saab valemeid (2.4.2) ja (2.4.6) kasutades arvutada kolmanda.

Valemitest (2.4.2) ja (2.4.6) saab osamakse R avaldada:

$$R = \frac{p \cdot S_n}{(1+p)^n - 1}, \quad (2.4.10)$$

$$R = \frac{p \cdot A_n}{1-(1+p)^{-n}}. \quad (2.4.11)$$

Järgnevalt võib osamakse arvutamiseks kasutada valemeid (2.4.10) ja (2.6.11), kuid selle asemel võib kasutada ka vahetult valemeid (2.4.2) ja (2.4.6), asendades nendes teadaolevad suurused ning avaldades seejärel R.

Näide 2.4.8. Andi on kogunud pensionile mineku hetkeks pensionifondi 50 000 eurot, mida hakatakse välja maksma iga kuu lõpus teostatavate maksetena 25 aasta jooksul. Kui suur on Andi igakuine pension, kui fondi nominaalne intressimäär on 6% kapitalisatsiooniga iga kuu lõpus?

Lahendus.

Kuna makseperioodide sagedus ühtib kapitalisatsioonide sagedusega ja maksed on perioodide lõpus, siis on tegemist lihtsa tavaannuiteediga, kus

$$j = 6\%,\ \ m = 12,\ \ p = i = \frac{j}{m} = \frac{6\%}{12} = 0{,}5\% = 0{,}005,\ \ n = 25 \cdot 12 = 300,\ A_{300} = 50000.$$

Nüüd võib kasutada valemit (2.6.13), kuid võib teadaolevad väärtused asetada ka vahetult valemisse (2.6.6):

$$50000 = R \cdot \frac{1-(1+0{,}005)^{-300}}{0{,}005},$$

$$50000 = R \cdot 155{,}206864,$$

$$R = \frac{50000}{155{,}206864} = 322{,}15 \text{ eurot}$$

Vastus: Andi peaks saama pensioni 322,15 eurot kuus. #

Makseperioodide arvu leidmiseks valemi (2.4.2) abil võime toimida järgmiselt:

$$S_n = R \cdot \frac{(1+p)^n - 1}{p}$$

$$\frac{p \cdot S_n}{R} = (1+p)^n - 1$$

$$(1+p)^n = \frac{p \cdot S_n}{R} + 1$$

$$\ln(1+p)^n = \ln\left(\frac{p \cdot S_n}{R} + 1\right)$$

$$n \cdot \ln(1+p) = \ln\left(\frac{pS_n}{R} + 1\right)$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{p \cdot S_n}{R} + 1\right)}{\ln(1+p)}. \qquad (2.4.12)$$

Analoogiliselt saab valemi (2.4.6) abil tuletada (teostada iseseisvalt) valemi

$$n = -\frac{\ln\left(1 - \frac{p \cdot A_n}{R}\right)}{\ln(1+p)}. \qquad (2.4.13)$$

Järgnevalt võib makseperioodide arvu leidmiseks kasutada valemeid (2.6.14) ja (2.6.15), kuid selle asemel võib kasutada ka vahetult valemeid (2.6.2) ja (2.6.6), asendades nendes teadaolevad suurused ning avaldades seejärel *n*.

Näide 2.4.9. Perekond Pukspuu soovib kodu renoveerimiseks võtta laenu 20 000 eurot. Laenu nominaalne intressimäär on 12% igakuise kapitalisatsiooniga. Kui pikk on laenutähtaeg, kui iga kuu lõpus tehtava osamakse suurus on

a) 230 eurot;

b) 250 eurot?

Arvutada intresside nominaalne suurus mõlema variandi korral. Millise variandi korral makstakse intressi vähem ja kui palju vähem?

Lahendus.

Laenu maksete graafikut saame käsitleda lihtsa tavaannuiteedina, sest makseperioodide sagedus ühtib kapitalisatsioonide sagedusega ja maksed on perioodide lõpus. Laenatud summat saab vaadelda antud annuiteedi nüüdisväärtusena.

a) Seega

$$R = 230\,,\ A_n = 20000,\ p = i = \frac{12\%}{12} = 1\% = 0{,}01,$$

mistõttu valemi (2.4.13) abil saame

$$n = -\frac{\ln\left(1 - \frac{0{,}01 \cdot 20000}{230}\right)}{\ln(1+0{,}01)} \approx 204{,}70 \text{ makseperioodi ehk kuud,}$$

st laenu tasumiseks läheb 205 kuud ehk 17 aastat ja 1 kuu, kus viimase osamakse suurus on

$0{,}7 \cdot 230 = 161$ eurot.

b) Antud juhul on võrreldes juhuga a) $R = 230$ asemel $R = 250$, mistõttu valemi (2.4.13) abil saame

$$n = -\frac{\ln\left(1 - \frac{0,01 \cdot 20000}{250}\right)}{\ln(1+0,01)} \approx 161,75 \text{ makseperioodi ehk kuud,}$$

st laenu tasumiseks läheb 162 kuud ehk 13,5 aastat, kus viimase osamakse suurus on

$$0,75 \cdot 250 = 187,5 \text{ eurot.}$$

Juhul a) oli osamaksete nominaalne summa

$$204 \cdot 230 + 161 = 47081 \text{ eurot ,}$$

millest intressid moodustasid

$$47081 - 20000 = 27081 \text{eurot.}$$

Juhul b) oli osamaksete nominaalne summa

$$161 \cdot 250 + 187,5 = 40437,5 \text{ eurot,}$$

millest intressid moodustasid

40437,5-20000 = 20437,5 eurot.

Järelikult teise variandi korral makstakse intressi nominaalselt vähem

27081 - 20437,5 = 6643,5 eurot.#

Märkus 2.4.1. Eelnevast näitest saab teha huvitava järelduse. Nimelt, kui suurendada laenu osamakset $(20:230) \cdot 100\% \approx 8,7\%$ võrra, väheneb laenult tasutav nominaalne intress $(6643,5:27081) \cdot 100\% \approx 24,5\%$, st märgatavalt enam. Lisaks eelnevale väheneb laenutähtaeg kolme aasta ja 7 kuu võrra. Järeldus öeldust võiks olla selline, et kui perekond Pukspuu on osav investeerija ning suudab vähemkulutatud 20 eurot investeerida nii, et selle aastane tootlus laenuperioodi jooksul on suurem kui laenulepingu 12% intress igakuise kapitalisatsiooniga, siis peaks ta kasutama võimalust a). Kui aga perekond Pukspuul ei ole eriti häid investeerimise kogemusi, siis oleks kasulikum valik variant b), sest 20 eurot perekonna igakuises tarbimises ei tarvitse avaldada väga märgatavat mõju perekonna elatustasemele.

Märkus 2.4.2. Märgime, et intressimäära p arvutamine on küllaltki keerukas, valemitest (2.4.2) ja (2.4.6) p leidmiseks tuletatud võrrandid on keerukad ning nende lahendamine ei kuulu koolide tavakursusesse. Nendel võrranditel puudub üldjuhul täpne lahend, lahendada saab vaid ligikaudselt, kasutades numbrilisi meetodeid, mis ei kuulu gümnaasiumi õppekavasse. Praktikas lahendatakse selliseid võrrandeid arvuti abil. Meie vaatleme p arvutamist programmide WolframAlpha (https://www.wolframalpha.com/) ja GeoGebra (www.geogebra.org) abil. Märgime veel, et pankade käsutuses on vastavad arvutiprogrammid või valemitega (2.4.4) ja (2.4.7) määratud koefitsientide $s_{n,p}$ ja $a_{n,p}$ väärtuste tabelid, mis võimaldavad p väärtuse piisavalt suure täpsusega määrata.

Näide 2.4.10. Kalev võttis viieks aastaks pangast laenu 25 000 eurot ning peab laenu kustutamiseks iga kuu lõpus tegema pangale tagasimakse 500 eurot. Kui suur on aastane intressimäär, kui kapitalisatsioon toimub iga kuu lõpus?

Lahendus.

Laenu aastase intressimäära arvutamiseks arvestame, et tegemist on tava-annuiteediga, mille nüüdisväärtus $A_{12} = 25000$, igakuine osamakse $R = 500$ ja makseperioodide arv $n = 5 \cdot 12 = 60.$ Järelikult kapitalisatsiooniperioodi ehk ühe kuu intressimäära saab valemi (2.4.6) põhjal leida võrrandi

$$25000 = 500 \cdot \frac{1-(1+p)^{-60}}{p} \quad \text{ehk} \quad 50 = \frac{1-(1+p)^{-60}}{p}$$

lahendina. Selle võrrandi lahendamiseks vaatleme kahte võimalust.

Esimene võimalus. 💻 Kasutame veebipõhist programmi *WolframAlpha*. Selleks toimime järgmiselt:

1) Avame lingi https://www.wolframalpha.com/

2) Sisestame järgmise rea: 50=(1-(1+p)^(-60))/p.

3) Klõpsame võrdusmärgil.

4) Arvuti väljastab mitu lahendit, kuid meile sobib ainult positiivne reaalarvuline lahend

$$p \approx 0,00618341.$$

Aastane intressimäär on seega $12 \cdot p \approx 12 \cdot 0,00618341 \approx 0,0742 = 7,42\%.$

Teine võimalus. 💻 Kasutame programmi *GeoGebra*. Selleks toimime järgmiselt:

1) Avame lingi www.geogebra.org (programmi saab kasutada veebipõhiselt, kuid võib ka endale arvutisse installeerida).

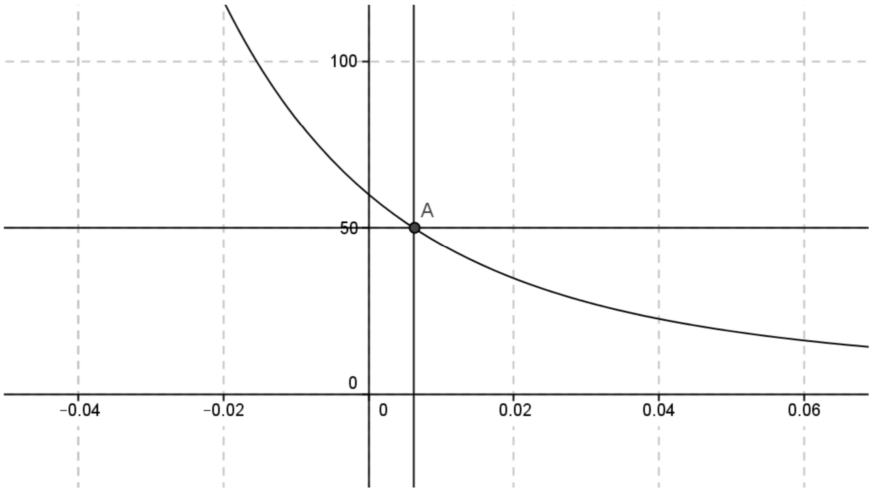
2) Lahendame antud võrrandi graafiliselt. Kuna meid huvitab selline p väärtus, mille korral on avaldise $\frac{1-(1+p)^{-60}}{p}$ väärtus võrdne arvuga 50, siis joonestame funktsioonide

$$y = \frac{1-(1+x)^{-60}}{x} \text{ ja } y = 50 \qquad (2.4.14)$$

graafikud (*p* asemel peame *GeoGebras* kasutama tähist *x*). Meid huvitab vastavate graafikute lõikepunkti *x*-koordinaat, st selline *x* väärtus, mille korral on *y* väärtused võrdsed arvuga 50.

3) Sisestame eraldi y = (1 - (1 + x)^(-60)) / x ning *y* = 50.

4) Peale vaate kohandamist saame joonise 2.4.6. Lõikepunkti leidmiseks kasutame tööriistaribalt nuppu  („Kahe objekti lõikepunktid“, vt vasakult teine nuppude loetelu).



Joonis 2.4.6. Võrrandi graafiline lahendamine programmis *GeoGebra*.

5) Funktsioonide (2.4.14) lõikepunkti *A* ligikaudsed koordinaadid on (0,01; 50). Kui soovime täpsemaid koordinaate, siis selleks saame kasutada menüüd „Võimalused“. Sealt valime „Ümardamine“. Hetkel piirdume viie kohaga peale koma, saades lahendiks $p \approx 0{,}00618$.

Aastane intressimäär on seega $12 \cdot p = 12 \cdot 0{,}00618 \approx 0{,}0742 = 7{,}42\%$.

2.4.3. Igavene annuiteet ehk perpetuiteet

Mitmetel juhtudel pole annuiteedi kestus teada või see on väga pikaajaline. Sellisel juhul on mõistlik vaadelda tähtaega lõpmatuna, st eeldada, et annuiteet sisaldab lõpmata palju makseperioode. Näiteks fond, mis on loodud iga-aastase fikseeritud summaga teaduspreemia väljamaksmiseks

Annuiteeti, mille tähtaeg on lõpmatu, st sisaldab lõpmata palju osamakseid, nimetatakse **igaveseks** (ka **tähtajatuks** või **lõputuks**) **annuiteediks** ehk **perpetuiteediks** (*perpetuity*)**.**

Tuletame valemi, mis seob perpetuiteedi

osamakse *R*,

makseperioodi intressimäära p,

nüüdisväärtuse A.

Oletame, et on asutatud fond, millesse on alghetkel paigutatud summa A ehk mille algkapitaliks on A. Selle fondi arvelt soovitakse kindla ajaperioodi järel maksta välja summa R. Veel oletame, et sellesse fondi paigutatud raha teenib intressi määraga p nimetatud ajaperioodi kohta (ja nimetatud perioodi jooksul intresse algsummale ei lisata). Esimese perioodi lõpuks on teenitud intress võrdne korrutisega $A \cdot p$. Kui see summa makstakse välja, siis on esimese perioodi lõpul fondis ikka summa A, mis järgneva perioodi lõpuks teenib jälle intressi suurusega $A \cdot p$. Makstes jälle selle summa välja, on ka kolmanda perioodi alguseks fondis summa A, jne. Järelikult, makstes iga makseperioodi lõpus välja summa $A \cdot p$, on järgneva perioodi algul fondis ikka summa A. Seepärast võib vaadeldava perpetuiteedi osamakse R võtta võrdseks suurusega $A \cdot p$ ning otsitavaks seoseks on $R = A \cdot p$, millest saame

$$A = \frac{R}{p}. \qquad (2.4.15)$$

Valem (2.4.15) ongi perpetuiteedi nüüdisväärtuse arvutamise valemiks, kui R ja p on teada.

Näide 2.4.10. Pank soovib asutada fondi, mille arvelt makstakse parima näitleja aastapreemiat. Kui suur peaks olema fondi algkapital, kui fondis paiknev raha teenib intressi nominaalse intressimääraga 13% kapitalisatsiooniga iga aasta lõpus ning aastapreemia suurus on 2000 eurot?

Lahendus.

Antud perpetuiteeti saame käsitleda lihtsa tavaannuiteedina, sest makseperioodide sagedus ühtib kapitalisatsioonide sagedusega ja maksed on perioodide lõpus. Fondi algkapital on perpetuiteedi otsitavaks nüüdisväärtuseks A ja

$$p = i = 13\% = 0{,}13, \quad R = 2000.$$

Järelikult valemi (2.4.15) põhjal on otsitavaks algkapitali väärtuseks

$$A = \frac{2000}{0{,}13} = 15384{,}62 \text{ eurot.}$$

Vastus: fondi algkapital peaks olema $15384{,}62$ eurot. #

Märkus 2.4.3. Valemi (2.4.15) saab tuletada ka vahetult valemist (2.4.6), võttes selle valemi paremast poolest piirväärtuse protsessis $n \to \infty$.

Ülesanne iseseisvaks mõtlemiseks. Milline on perpetuiteedi tulevikuväärtus?

ÜLESANDED

2.4.1. Puudega inimeste toetuseks on loodud fond, mille jaoks kogutakse vahendeid lihtsa tavaannuiteedina. Selle annuiteedi tähtaeg on neli aastat ning nominaalne intressimäär 16,5% kapitalisatsiooniga iga kvartali lõpus. Kui suur oli selle fondi tulevikuväärtus nelja aasta pärast, kui iga kvartali lõpus tehtav osamakse on 40 000 eurot? Kui suur oli selle annuiteedi nüüdisväärtus fondi loomise hetkel?

2.4.2. Leida järgnevas tabelis esitatud tavaannuiteetide tulevikuväärtused ja nüüdisväärtused.

Nr	Osamakse (eurot)	Makseperiood	Tähtaeg	Intressi-määr	Kapitalisatsioone aastas
1	3000	1 aasta	3 aastat	18%	1
2.	325	1 kuu	15 kuud	15%	12
3.	140	3 kuud	7,75 aastat	10%	4
4.	894	6 kuud	8,5 aastat	9%	2
5.	225	1 kvartal	5,25 aastat	13%	4

2.4.3. Kui suur oleks ülesandes 2.4.2 kirjeldatud annuiteedi tuleviku- ja nüüdisväärtus, kui lihtsa tavaannuiteedi asemel oleks tegemist lihtsa avanssannuiteediga?

2.4.4.* Leopold on 25 aasta jooksul kogunud raha pensionifondi makstes iga kvartali lõpus fondi 400 eurot, mis teenis esimese 10 aasta ja 3 kuu jooksul intressi nominaalse intressimääraga 8% kapitalisatsiooniga iga kvartali lõpus ning järgneva 14 aasta ja 9 kuu jooksul nominaalse intressimääraga 10% igakuise kapitalisatsiooniga. Milline oli kogunenud summa 25 aastase perioodi lõpul?

2.4.5.* Osvald kogub pensionipõlveks raha, makstes 15 aasta jooksul iga kuu lõpus arvele 50 eurot, mis teenib intressi nominaalse intressimääraga 12% igakuise kapitalisatsiooniga. Kui suur on

a) kogunenud Osvaldi arvele raha 15 aastase perioodi lõpuks;

b) osamaksete nominaalne summa;

c) intresside summaarne väärtus?

2.4.6. Toomas soovib panna täna fondi rahasumma, mis võimaldaks tema emal võtta järgneva 20 aasta jooksul iga kuu lõpus välja 180 eurot. Kui suur peaks see summa olema, kui raha teenib intressi nominaalse intressimääraga 8% kapitalisatsiooniga iga kuu lõpus?

2.4.7.* Joonas ostis korteri, tehes koheselt makse 12 000 eurot, lisaks sellele võttis ta pangalt laenu, mida hakkab kustutama iga kuu lõpus toimuvate osamaksetega suuruses 350 eurot. Kui palju maksis korter, kui nominaalne intressimäär oli 6,5% igakuise kapitalisatsiooniga ning laenutähtaeg oli kaheksa aastat? Kui suur oli makstud intresside kogusumma?

2.4.8. Eduard soovib koguda raha oma poja ülikooliõpinguteks 10 aasta vältel iga kvartali lõpus toimuvate võrdse suurusega osamaksetega suuruses 600 eurot. Kui suur summa oli 10 aastaga arvele kogunenud ja kui suur oli kõigi tehtud maksete nüüdisväärtus 10 aastase perioodi algul, kui maksed teenisid intressi nominaalse intressimääraga 13% kapitalisatsiooniga iga kvartali lõpus?

2.4.9.* Ardo on kogunud raha pensionifondi, mille järgi talle makstakse esimese 10 aasta jooksul 350 eurot iga kuu lõpus ja järgneva 15 aasta jooksul 400 eurot iga kuu lõpus. Milline on kõigi plaanitavate pensionimaksete nüüdisväärtus üks kuu enne esimese pensionimakse saamist, kui fondi paigutatud raha teenib intressi 8% nominaalse intressimääraga kapitalisatsiooniga iga kuu lõpus?

2.4.10.* Mariannel on võimalik valida, kas minna pensionile 60 aastaselt või 63 aastaselt. Kui Marianne valib esimese variandi, siis vähendatakse tema igakuist pensioni iga varem pensionile mindud kuu kohta 0,5%. Oletades, et Marianne elab 85 aastaseks, määrata, milline pakutavatest variantidest on Mariannele kasulikum, kui raha teenib intressi nominaalse intressimääraga 7,4% igakuise kapitalisatsiooniga.

2.4.11. Kustas soovib iga kvartali lõpus toimuvate osamaksetega koguda investeerimisfondi kaheksa aastaga 25 000 eurot. Kui suur peaks olema osamakse, kui fondi nominaalne intressimäär on 9% kapitalisatsiooniga iga kvartali lõpus?

2.4.12. Leida järgnevas tabelis esitatud annuiteetide osamaksete suurused.

Nr	Tulevikuväärtus (eurot)	Nüüdisväärtus (eurot)	Makseperiood	Tähtaeg	Intressimäär	Kapitalisatsioone aastas
1.	12 000		3 kuud	5,5 aastat	12%	4
2.	25 500		1 aasta	14 aastat	7%	1
3.		10 000	6 kuud	7 aastat	10%	2
4.		8000	1 kuu	4,25 aastat	14%	12
5.	250 000		3 kuud	20 aastat	6,5%	4
6.		24 000	1 kuu	16 aastat	5%	12

2.4.13. Leida järgmises tabelis kirjeldatud annuiteetide tähtajad.

Nr	Tulevikuväärtus (eurot)	Nüüdisväärtus (eurot)	Makseperiood	Osamakse (euro)	Intressimäär	Kapitalisatsioone aastas
1.	14 000		3 kuud	800	12%	4
2.	25 500		1 aasta	2100	7%	1
3.		11 000	6 kuud	650	10%	2
4.		8000	1 kuu	250	14%	12
5.	250 000		3 kuud	1200	6,5%	4
6.		24 000	1 kuu	750	5%	12

2.4.14. Perekond Kuusk soovib korteri ostuks võtta laenu 50 000 eurot. Laenu nominaalne intressimäär on 6% igakuise kapitalisatsiooniga. Kui pikk on laenutähtaeg, kui iga kuu lõpus tehtava osamakse suurus on 320 eurot? Kui palju makstakse intressi?

2.4.15. **Jaan soovib võtta laenu 35 000 eurot. Laenu nominaalne intress on 7% igakuise kapitalisatsiooniga. Kui pikk on laenutähtaeg, kui iga kuu lõpus tehtava osamakse suurus on

a) 280 eurot,

b) 310 eurot?

Arvutada intresside nominaalne suurus mõlema variandi korral. Millise variandi korral

makstakse intressi vähem ja kui palju vähem?

2.4.16. Laen 13 000 eurot tuleb kustutada kuue aasta jooksul iga kvartali lõpus toimuvate võrdse suurusega osamaksetega 600 eurot. Kui suur on aastane intressimäär, kui kapitalisatsioon toimub iga kvartali lõpus?

2.4.17. Kaspar peab laenu 7000 eurot tasuma kolme aasta jooksul iga kuu lõpus toimuvate võrdse suurusega osamaksetega 230 eurot. Kui suur on aastane intressimäär, kui kapitalisatsioon toimub iga kuu lõpus?

2.4.18. Leida tavaperpetuiteedi nüüdisväärtus, kui

a) Osamakse on 750 eurot, makseperiood kolm kuud ja intressimäär 14% kapitalisatsiooniga iga kvartali lõpus,

b) Osamakse on 225 eurot, makseperiood üks kuu ja intressimäär 16% kapitalisatsiooniga iga kuu lõpus.

2.4.19. Pank soovib asutada fondi, mille arvelt makstakse aasta parima sportlase preemiat. Kui suur peaks olema fondi algkapital, kui fondis paiknev raha teenib intressi nominaalse intressimääraga 11% kapitalisatsiooniga iga aasta lõpus ning aastapreemia suurus on 2500 eurot?

2.4.20. * Kui suure summa saab iga kuu välja võtta perpetuiteedi arvelt, mille nüüdisväärtus on 120 000 eurot ning arvele pandud raha teenib intressi nominaalse intressimääraga 16% igakuise kapitalisatsiooniga?

KIRJANDUST LUGEMISEKS

Kaasa, A. Majandusteaduse matemaatilised alused. Tartu, Tartu Ülikooli Kirjastus, 2002. Lk 186-188.

Telgmaa, A., Rahandusküsimusi koolimatemaatikas. Kirjastus. Tallinn, „Avita“, 1994. Lk 18-20, 37-45.

2.5. Laenud, investeerimine ja säästmine

Antud osas käsitleme mitmesuguseid laene nagu eluasemelaenud (ehk kodulaenud), väikelaenud, liisingud, õppelaenud, järelmaks, SMS-laenud, krediitkaardid.

2.5.1. Laenu kustutamine võrdsete osamaksetega

Kui laenuleping näeb ette laenu kustutamist võrdse suurusega osamaksetena kindla pikkusega ajaperioodide tagant, siis laenu tagasimaksegraafikud kujutavad endast sisuliselt annuiteete. Tavaannuiteeti kasutatakse näiteks väikelaenude (tavaliselt kestusega 1-5 aastat), järelmaksu, eluasemelaenu, õppelaenu puhul. Liisingumaksete puhul kasutatakse ka avanssannuiteeti.

Peale seda, kui laenuvõtja ja laenuandja on jõudnud kokkuleppele laenusumma, intressimäära ja maksete sageduse osas, on võimalikud kaks erinevat lähenemist:

I. Esiteks määratakse kindlaks laenutähtaeg ja seejärel arvutatakse osamakse suurus, mis täielikult kustutab kogu võla valitud tähtaja lõpuks.
II. Kõigepealt määratakse kindlaks osamakse suurus ja seejärel arvutatakse osamaksete arv, mis võimaldab kogu võla kustutada. Makseperioodide arv määrab siis ka maksetähtaja.

Teist varianti kasutatakse harvem, peamiselt siis, kui soovitakse, et osamakse suurus jääks kindlatesse piirides. Tavaliselt on siis ka viimane makse eelnevatest erineva suurusega. Mõlema meetodi puhul makstakse intressi laenu jäägilt. Üldine printsiip, millel põhineb laenumaksete tasumine on järgmine:

laenu nimiväärtus e. põhisumma on võrdne kõigi tulevaste maksete summaarse nüüdisväärtusega, kusjuures diskonteerimine toimub lepingu allakirjutamise hetkel määratud intressimäära järgi.

Vaatleme kõigepealt juhtu I. Olgu

R laenu osamakse suurus,

n laenu osamaksete arv,

A_n laenu nimiväärtus ehk põhisumma,

p intressimäär makseperioodi kohta.

Siis vastavalt ülalesitatud printsiibile (vt annuiteedi nüüdisväärtuse valemit)

$$A_n = R \cdot \frac{1-(1+p)^{-n}}{p}. \tag{2.5.1}$$

Nüüd on võimalik leida järgmised olulised laenumaksete komponendid:

1. Osamakse R arvuline väärtus, mille saame valemist (2.5.1) avaldada, kui n, p ja A_n on teada.
2. Kogu laenu kustutamiseks kuluv nominaalne rahasumma $n \cdot R$.
3. Kogu laenu kustutamiseks makstud nominaalne intress $I = n \cdot R - A_n$.
4. Laenujääk L_k peale k-ndat osamakset on

$$L_k = S_{k;A_n} - S_{k;R}, \tag{2.5.2}$$

kus

$S_{k;A_n} = A_n \cdot (1+p)^k$, $k < n$ on laenu nimiväärtuse tulevikuväärtus,

$S_{k;R} = R \cdot \frac{(1+p)^k - 1}{p}$ esimese k osamakse tulevikuväärtus peale k-ndat makset.

Valemi (2.5.2) asemel võib arvutada ka järelejäänud n-k osamakse summaarse nüüdisväärtuse A_{n-k} hetkel, kui k-s osamakse on tehtud, sest $A_{n-k} = S_{k;A_n} - S_{k;R}$.

5. k-nda osamakse laenu nimiväärtuse kustutamiseks kuluv osa ja intress; selleks tuleb leida laenujääk peale eelnevat ehk (k-1)-st osamakset, milleks on $L_{k-1} = S_{k-1;A_n} - S_{k-1;R}$ (vt valem (2.5.2)) ehk viimase n-k+1 osamakse summaarne nüüdisväärtus A_{n-k+1} hetkel, kui (k-1)-ne osamakse on tehtud; siis k-nda osamakse intressiosa I_k on

$$I_k = pL_{k-1} \tag{2.5.3}$$

ehk

$$I_k = pA_{n-k+1} \tag{2.5.4}$$

ja laenu nimiväärtuse kustutamiseks kuluv osa on

$$d_k = R - I_k \tag{2.5.5}$$

Illustreerime punktides 4. ja 5. kirjapandut ka joonisel 2.5.1 esitatud skeemil.

	Osa-makse	Antud hetkeks makstud osamaksete tulevikuväärtus	Järelejäänud osamaksete summaarne nüüdisväärtus	Laenu nimiväärtuse tulevikuväärtus antud hetkel	Laenujääk peale vastavat osamakset
0		0	A_n	A_n	$S_{n;R}$
1	R				
2	R				
$k-1$	R	$S_{k-1;R}$	A_{n-k+1}	$S_{k-1;A_n}$	$L_{k-1} = S_{k-1;A_n} - S_{k-1;R}$
k	R	$S_{k;R}$	A_{n-k}	$S_{k;A_n}$	$L_k = S_{k;A_n} - S_{k;R}$
$k+1$	R				
$n-1$	R				
n	R	$S_{n;R}$	0	$S_{n;A_n}$	0

Joonis 2.5.1. Laenujäägi leidmine ning fikseeritud osamaksest laenu nimiväärtuse kustutamiseks minev osa ja intressideks makstav osa.

Näide 2.5.1. Jüri võttis laenu viieks aastaks 8000 eurot 12% intressimääraga igakuise kapitalisatsiooniga, mida kustutatakse võrdsete iga kuu lõpul toimuvate osamaksetega. Leida

a) osamakse suurus;

b) kogu laenu kustutamiseks vajalik nominaalne summa;

c) makstud intresside nominaalne suurus;

d) laenujääk peale teist aastat;

e) 30-nda osamakse intressiks minev summa ja laenu nimiväärtust kustutav osa;

f) teisel aastal makstud intressid?

Lahendus.

Antud maksegraafikut saame käsitleda lihtsa tavaannuiteedina, sest makseperioodide sagedus ühtib kapitalisatsioonide sagedusega ja maksed on perioodide lõpus. Seega

$$A_{60} = 8000, \qquad p = i = \frac{12\%}{12} = 1\% = 0{,}01, \qquad n = 5 \cdot 12 = 60.$$

a) Asendades teadaolevad suurused valemisse (2.5.1), saame

$$8000 = R \cdot \frac{1-(1+0{,}01)^{-60}}{0{,}01}$$

ehk

$$8000 \approx R \cdot 44{,}95503841,$$

millest leiame

$$R = \frac{8000}{44{,}95503841} \approx 177{,}96 \text{ eurot.}$$

b) Laenu kustutamiseks vajalik nominaalne summa $n \cdot R = 60 \cdot 177{,}96 = 10677{,}6$ eurot.

c) Kogu laenu kustutamiseks makstud nominaalne intress

$$I = 60 \cdot R - A_{60} = 10677{,}6 - 8000 = 2677{,}6 \text{ eurot.}$$

d) Siin $n = 60$, k=24. Järelikult valemi (2.5.2) põhjal

$$S_{24;A_{60}} = 8000 \cdot (1+0{,}01)^{24} \approx 10157{,}88 \text{ eurot,}$$

$$S_{24;R} = 177{,}96 \cdot \frac{(1+0{,}01)^{24}-1}{0{,}01} = 4800{,}2 \text{ eurot,}$$

$$L_{24} = S_{24;A_{60}} - S_{24;R} = 10157{,}88 - 4800{,}2 = 5357{,}68 \text{ eurot.}$$

e) **Esimene võimalus.** Leiame laenu nimiväärtuse tulevikuväärtuse peale 29-ndat makset:

$$S_{29;A_{60}} = 8000 \cdot (1+0{,}01)^{29} \approx 10675{,}03 \text{ eurot}$$

ja esimese *29* osamakse tulevikuväärtuse peale 29-ndat makset:

$$S_{29;R}=177,96\cdot\frac{(1+0,01)^{29}-1}{0,01}\approx 5952,83\ \text{eurot.}$$

Siis valemi (2.5.3) abil leiame 30-nda osamakse intressiosaks

$$I_{30}=0,01\cdot L_{29}=0,01\cdot(S_{29;A_{60}}-S_{29;R})=$$

$$0,01\cdot(10675,03-5952,83)=47,22\ \text{eurot}$$

ja nimiväärtuse kustutamiseks minev osa valemi (2.5.5) järgi on

$$d_{30}=R-I_{30}=177,96-47,22=130,74\ \text{eurot.}$$

Teine võimalus. Leiame järelejäänud maksete (n-k+1 = 60-30+1=31) nüüdisväärtuse A_{31} peale 29-ndat osamakset (valem (2.5.1), kus n =31)

$$A_{31}=177,96\cdot\frac{1-(1+0,01)^{-31}}{0,01}=4723,47\ \text{eurot.}$$

Siis valemi (2.5.4) põhjal

$$I_{30}=0,01\cdot 4723,47=47,23\ \text{eurot.}$$

Väike erinevus 47,23- 47,22 = 0,01 eurot on tingitud ümmardamisest.

f) Teisel aastal makstud intress on arvutatav valemiga

$$12R-(L_{12}-L_{24})$$

kus

12R on teisel aastal makstud osamaksete nominaalne summaarne väärtus

ning

$L_{12}-L_{24}$ peale 12-ndat ja 24-ndat osamakset arvutatud laenujääkide vahe.

Arvutame:

$$S_{12;A_{60}}=8000\cdot(1+0,01)^{12}\approx 9014,60\ \text{eurot,}$$

$$S_{12;R}=177,96\cdot\frac{(1+0,01)^{12}-1}{0,01}=2256,98\ \text{eurot,}$$

$$L_{12}=S_{12;A_{60}}-S_{12;R}=9014,60\ -\ 2256,98\ =\ 6757,62\ \text{eurot,}$$

$$12R-(L_{12}-L_{24})=12\cdot 177,96-(6757,62-5357,68)=735,58\ \text{eurot. \#}$$

Näide 2.5.2. Laen üks miljon eurot võeti viieks aastaks. Kogu laenusumma tasutakse võrdsete osamaksetena iga aasta lõpus ja laenu võlajäägilt makstakse intressi 10% aastas iga-aastase kapitalisatsiooniga. Koostada laenu tasumise graafik, kus eraldi tuua välja iga-aastane osamakse ja selles näidata ära laenu nimiväärtuse tasumiseks minev osa ning intress.

Lahendus.

Antud maksegraafikut saame käsitleda lihtsa tavaannuiteedina, sest makseperioodide sagedus ühtib kapitalisatsioonide sagedusega ja maksed on perioodide lõpus. Seega

$$A_5 = 1\,000\,000, \qquad p = i = 10\% = 0{,}1, \qquad n = 5, \qquad L_0 = A_5 = 1\,000\,000.$$

Laenu tasumise graafik esitame järgmise tabelina:

Aasta k	Võlajääk L_{k-1}	Aastane osamakse $R = d_k + I_k$	Põhisummat kustutav osa d_k	Intressid I_k
1	1 000 000	263 797 (1)	163 797 (3)	100 000 (2)
2	836 203 (4)		180 177 (6)	83620,3 (5)
3	658 026 (7)		198 155	65802,6
4	457 831		218014	45783,1
5	239 814		239 816	23981,6

Esitame mõned arvutused (jälgida numbreid tabelis):

(1) $1000000 = R \cdot \dfrac{1-1{,}1^{-5}}{0{,}1} \Rightarrow \quad 1000000 = R \cdot 3{,}790787 \Rightarrow$

$$R = \frac{1\,000\,000}{3{,}790787} \approx 263\,797 \text{ eurot,}$$

(2) $I_1 = 0{,}1 \cdot 1\,000\,000 = 100\,000$ eurot,

(3) $d_1 = 263\,797 - 100\,000 = 163\,797$ eurot,

(4) $L_1 = 1000\,000 - 163\,797 = 836\,203$ eurot,

(5) $I_2 = 0{,}1 \cdot 836\,203 = 83620{,}3$ eurot,

(6) $d_2 = 263\,797 - 83\,620{,}3 \approx 180\,177$ eurot,

(7) $L_2 = 836\,203 - 180\,177 = 658\,026$ eurot. #

Kasutame varianti II (vt 2.5.1 algus), kus kõigepealt määratakse ära osamakse suurus ja seejärel leitakse laenumaksete arv. Laenumaksete arvu n määramiseks saame kasutada varem esinenud valemit (2.4.13):

$$n = -\frac{\ln\left(1 - \frac{p \cdot A_n}{R}\right)}{\ln(1+p)}. \qquad (2.5.6)$$

Siin üldjuhul ei tule n väärtuseks täisarv, st **viimane osamakse on erineva suurusega. Viimase osamakse suurus koosneb võlajäägist peale eelviimast makseperioodi, millele lisandub viimase (pooliku) perioodi intress.**

Näide 2.5.3. Kirsti võttis laenu 7500 eurot nominaalse intressimääraga 8% kapitalisatsiooniga igas kvartalis. Millise ajaga saab Kirsti laenu kustutatud, kui osamaksed toimuvad iga kvartali lõpus suurusega 500 eurot? Milline on viimase osamakse suurus?

Lahendus.

Antud maksegraafikut saame käsitleda lihtsa tavaannuiteedina, sest makseperioodide sagedus ühtib kapitalisatsioonide sagedusega ja maksed on perioodide lõpus. Seega

$$R = 500, \quad A_n = 7500, \qquad p = i = \frac{8\%}{4} = 2\% = 0{,}01.$$

Valemi (2.5.5) abil arvutame

$$n = -\frac{\ln\left(1 - \frac{0{,}02 \cdot 7500}{500}\right)}{\ln(1+0{,}02)} = 18{,}0115 \text{ kvartalit.}$$

Seega saab Kirsti võla kustutatud 19 makseperioodiga ehk nelja aasta kahe kuu ja $0{,}0115 \cdot 90 \approx 16$ päevaga.

Võlajääk eelviimase makseperioodi järel on järelejäänud 0,0115 osamakse nüüdisväärtus:

$$A_{0{,}0115} = 500 \cdot \frac{1-(1+0{,}02)^{-0{,}0115}}{0{,}02} = 5{,}69 \text{ eurot,}$$

millelt tuleb veel maksta intressi

$$0{,}02 \cdot 5{,}69 = 0{,}11 \text{ eurot.}$$

Järelikult viimase osamakse suurus on 5,69 + 0,11= 5,80 eurot.

Vastus: Kirsti kustutab võla nelja aasta kahe kuu ja 16 päevaga; viimase osamakse suurus on 5,80 eurot. #

2.5.2. Liisingud

Liising (*lease / leasing*) on laenuvõtmise vorm, milles laenuandja ehk liisingufirma annab laenuvõtjale õiguse hallata ja kasutada seadmeid, esemeid lepingus fikseeritud ajavahemiku jooksul kindlate ajavahemike tagant laekuvate maksete eest.

Liisingut kasutatakse seadmete hankeks tootmisettevõtetes ning auto, mootorratta, veesõiduki, elamispinna hankimiseks. Tuleb rõhutada, et liisingusaaja ei saa liisitava objekti omanikuks. Omanikuks on liisingufirma, mis ostab liisitava objekti selle tootjalt või omanikult välja ning annab liisinguvõtjale õiguse hallata ja kasutada seda objekti lepingus fikseeritud ajavahemiku jooksul kindla aja tagant laekuvate maksete eest. Liisingu puhul peavad laenumaksed katma kõik liisinguandja kulud ning andma ka täiendavat tulu.

Võlgnevus liisingulepingu järgi kustutatakse järgmist liiki maksetega:

- **avanss** (*payment in advance*), st makstakse lepingu algul kohe teatav summa liisitava objekti väärtusest,
- **perioodilised liisingu maksed** (*periodic leasing payments*) (kas perioodi lõpul või algul),
- **väljaostu summa** (*redemption sum*).

Avanss ja väljaostu summa ei ole liisingu kohustuslikud elemendid. Tavaliselt kaetakse liisingus avansi ja perioodiliste maksetega suurem osa liisitava objekti väärtusest, tasumata jäänud osa moodustab objekti **jääkväärtuse** (*residual value*). Liisinguvõtjal on võimalus osta liisitav ese peale liisingutähtaja lõppemist liisingufirmalt välja, makstes objekti jääkväärtuse. Kui liisinguvõtja ei soovi liisitavat objekti välja osta, siis see objekt jääb liisingufirma omandisse. Liisinguid on erinevat tüüpi, mida me siin detailselt kirjeldama ei hakka, kuid erinevate liisingu tüüpidega on võimalik tutvuda pankade veebilehekülgedel, näiteks Swedbank'i ja SEB panga kõik liisingukalkulaatorid leiate nende pankade kodulehekülgedelt http://www.swedbank.ee ja http://www.seb.ee.

Liisinguga seotud maksete arvutamist me ei käsitle. Ülesannete osast leiate ülesandeid liisingu-maksete leidmise kohta pankade kalkulaatorite abil.

2.5.3. Krediitkaardid, kiirlaenud

Uurime veel lühiajaliste laenude selliseid tüüpe nagu laenamine krediitkaardi abil ning kiirlaenud või nn sms-laenud. Alustame kõigepealt **krediitkaartidega** (*credit cards*), milliseid on kasutusel mitmesuguste funktsionaalsustega. Osad krediitkaardid nõuavad kaardiomanikult igakuist hooldustasu, teised on aga sellised, mille puhul tuleb intressi maksta vaid siis, kui krediitkaardil olevat raha reaalselt kasutatakse. Vaatleme konkreetset näidet.

Näide 2.5.4. Hubertil on krediitkaart, mille kasutamise korral maksab ta pangale intressi iga kuu lõpus arvel olevalt võla jäägilt nominaalse intressimääraga 21%. Eelmise kuu lõpu seisuga oli Hubert pangale võlgu 200 eurot, sel kuul sooritas Hubert krediitkaardiga ostusid 85 eurot eest ja maksis pangale tagasi 45 eurot. Määrata
a) selle kuu intress eelmise kuu võlajäägilt;
b) võlajääk selle kuu lõpus;
c) järgmise kuu intress.

Lahendus.

Intressimäär ühe kuu kohta tuleb $21\% : 12 = 1{,}75\% = 0{,}0175$.

a) Selle kuu intress = $0{,}0175 \cdot 200 = 3{,}5$ eurot;

b) Eelmise kuu võlajääk 200 eurot
lisandus ost 85 eurot
intress 3,5 eurot
―――――
kokku 288,5 eurot
tagasimakse pangale -45 eurot
―――――
kokku 243,5 eurot, see on ka uus võlajääk selle kuu lõpus;

c) Järgmise kuu intress = $0{,}0175 \cdot 243{,}5 \approx 4{,}26$ eurot. #

Järgnevalt analüüsime viimastel aastatel laialt levinud laenuliiki, milleks on kiirlaen ehk SMS-laen (nimetus tuleneb sellest, et laenu saab tellida mobiiliga, saates laenu andvale firmale mobiililt sõnumi). Selliste laenude puhul ei saa rääkida ei liht- ega liitintressimäärast. Kiirlaenu puhul on sõltuvalt laenu tähtajast ja laenatavast summast fikseeritud kindla suurusega laenu kustutavad kuumaksed. Esitame siin ühe näite laenufirma SMS-Raha tabelist (vt tabel 2.5.1), kus vastavate maksete suurus kuus (eurodes) selle firma püsikliendile on ära toodud (vt http://www.smsraha.ee/). Uurime seda tabelit veidi. Näeme, et võttes 15 päevaks kiirlaenu 200 eurot, maksate selle eest $(20:200)\cdot 100\% = 10\%$ intressi. Näiteks, võttes aastaks kiirlaenu 200 eurot, maksate selle eest täiendavalt $16\cdot 33 - 200 = 196$ eurot intressi; mis moodustab laenu põhisummast $(196:200) = 0,98 = 98\%$.

Tabel 2.5.1. Kiirlaenufirma SMS-Raha laenumaksete graafik.

Summa	15 päeva	30 päeva	2 kuud	3 kuud	6 kuud	9 kuud	12 kuud
Püsiklient							
50	55.-	60.-					
100	110.-	120.-					
150	165.-	175.-	105.-	75.-	45.-	32.-	24.-
200	220.-	235.-	140.-	100.-	60.-	42.-	33.-
250	275.-	290.-	160.-	120.-	70.-	52.-	40.-
300	320.-	340.-	185.-	130.-	85.-	62.-	49.-

Näide 2.5.5. Roobert soovib võtta üheks aastaks kiirlaenufirmalt SMS-Raha teleri ostmiseks laenu 300 eurot. Kui palju peab Roobert maksma laenu kustutamiseks intressi, kui suure osa (protsentuaalselt) moodustab intress laenu põhisummast (lahendamisel kasutada tabeli andmeid 2.5.1) ja kui suur on aastane intressimäär?

Lahendus.

Tabelist 2.5.1 näeme, et võttes üheks aastaks laenu 300 eurot, on kuumakse suurus 49 eurot. Järelikult kogu laenu kustutamiseks peab Roobert kiirlaenufirmale tasuma $12\cdot 49 = 588$ eurot, millest intress moodustab 588 – 300 = 288 eurot, kusjuures intress moodustab

588 – 300 = 288 eurot ehk protsentuaalselt $288:300 = 0,96 = 96\%$.

Laenu aastase intressimäära arvutamiseks arvestame, et tegemist on tavaannuiteediga, mille nüüdisväärtus $A_{12} = 300$, igakuine osamakse $R = 49$ ja makseperioodide arv $n = 12$. Järelikult kapitalisatsiooniperioodi ehk ühe kuu intressimäära saab valemi (2.4.6) põhjal leida võrrandi

$$300 = 49\cdot\frac{1-(1+p)^{-12}}{p}$$

lahendina. Kasutades programmi *WolframAlpha* või *GeoGebra* (sarnaselt näites 2.4.10 esitatud ülesande lahendusele), saame, et $p \approx 0.122529$. Aastane intressimäär on seega

$$12 \cdot p \approx 12 \cdot 0{,}122529 \approx 1{,}4704 = 147{,}04\%.\#$$

Küsimus iseseisvaks mõtlemiseks. Võrreldes näidetes 2.5.4 ja 2.5.5 esitatud ülesannete lahendusi, hinnata, kumb laenamisviis, kas krediitkaardiga või SMS-laenu abil, on laenuvõtjale soodsam?

2.5.4. Erinevate laenude võrdlemine

Seni oleme laene ning erinevaid finantsotsuseid võrrelnud märkuses 2.4.2, näidetes 2.3.1 ja 2.4.7. Nüüd käsitleme laenude võrdlemise probleemi põhjalikumalt. Lisaks nominaalsele intressimäärale on väga oluliseks näitajaks erinevate laenude võrdlemisel krediidi kulukuse määr.

Krediidi kulukuse määr (*annual percentage rate*) on laenatud rahale aastas langev kõigi kulude (kaasa arvatud lepingutasu, kindlustus) koormus protsentides, eeldusel, et leping kehtib kokkulepitud tähtaja jooksul.

Lepingurikkumisega seonduvad kulud (sh sissenõude kulud jms) ei lähe krediidi kulukuse määra arvutamisel ja avaldamisel arvesse. Eestis on krediidi kulukuse määra arvutamise kord kehtestatud rahandusministri 13.10.2010. a määrusega nr 51 „Tarbijakrediidi kulukuse määra arvutamise kord“, vastavad arvutusvalemid on saadaval määruse lisas (vt Riigiteataja).

Lihtsustatud juhul leitakse krediidi kulukuse määr l valemist

$$A = B + \frac{R}{(1+l)^{t_1}} + \frac{R}{(1+l)^{t_2}} + \ldots + \frac{R}{(1+l)^{t_n}}, \qquad (2.5.7)$$

kus

A on saadud krediidi suurus,

B on lepingu sõlmimisega seotud kulud,

R võrdse suurusega laenu osamaksete väärtus,

t_n n-nda osamakse toimumise aeg aastates peale laenu saamist,

l krediidi kulukuse määr.

Näide 2.5.6. Laen 2050 eurot anti üheks aastaks ja kolmeks kuuks. Leida krediidi kulukuse määr, kui lepingu sõlmimisega seotud kulu oli 50 eurot ja laen kustutati ühekordse maksega 2500 eurot laenutähtaja lõpus.

Lahendus.

Antud juhul

$$A = 2050,\ \ R = 2500,\ \ \ n = 1,\ \ t_1 = 1{,}25.$$

Seepärast valemi (2.5.7) põhjal

$$2050 = 50 + \frac{2500}{(1+l)^{1,25}} \ \text{ ehk } \ 2000 = \frac{2500}{(1+l)^{1,25}},$$

millest järeldub

$$(1+l)^{1,25} = \frac{2500}{2000} \Rightarrow\ 1+l = \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{1,25}} \ \Rightarrow$$

$$l = \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{1,25}} - 1 \approx 0{,}1954 = 19{,}54\%.\ \#$$

Näide 2.5.7. Peeter saab pangalt laenu 6200 eurot, mis tuleb tagasi maksta kahe ja poole aasta jooksul võrdsete kuumaksetega 240 eurot. Lepingu sõlmimise kulu krediidi saamiseks on 0,5% laenusummast.

Lahendus.

Siin

$$A = 6200,\ \ R = 240,\ \ \ B = 0{,}005 \cdot 6200 = 31,$$

$$n = 30,\ \ t_1 = \frac{1}{12}, t_2 = \frac{2}{12}, ..., t_{30} = \frac{30}{12}.$$

Järelikult valemi (2.5.7) põhjal (viime B väärtuse vasakule poole)

$$6200 - 31 = \frac{240}{(1+l)^{\frac{1}{12}}} + \frac{240}{(1+l)^{\frac{2}{12}}} + ... + \frac{240}{(1+l)^{\frac{30}{12}}}. \qquad (2.5.8)$$

Paneme tähele, et saadud võrrandi paremal poolel on geomeetrilise jada n esimese liikme summa, kus jada esimene liige a ja tegur q on järgmised:

$$a = \frac{240}{(1+l)^{\frac{1}{12}}} \ \text{ ja } \ \ q = \frac{1}{(1+l)^{\frac{1}{12}}}.$$

Et geomeetrilise jada n esimese liikme summa S avaldub valemina

$$S = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

siis

$$\frac{240}{(1+l)^{\frac{1}{12}}} + \frac{240}{(1+l)^{\frac{2}{12}}} + \ldots + \frac{240}{(1+l)^{\frac{30}{12}}} = \frac{240}{(1+l)^{\frac{1}{12}}} \cdot \frac{\frac{1}{(1+l)^{\frac{30}{12}}} - 1}{\frac{1}{(1+l)^{\frac{1}{12}}} - 1} = 240 \cdot \frac{1-(1+l)^{-\frac{30}{12}}}{(1+l)^{\frac{1}{12}} - 1}.$$

Seepärast võime võrrandi (2.5.8) ümber kirjutada kujul

$$6169 = 240 \cdot \frac{1-(1+l)^{-\frac{30}{12}}}{(1+l)^{\frac{1}{12}} - 1}.$$

💻 Kasutades programme *WolframAlpha* või *GeoGebra* (sarnaselt näites 2.4.10 esitatud ülesande lahendustele), saame krediidi kulukuse määraks *l* ligikaudu 13,05% #

Krediidi kulukuse määra tähtsuse rõhutamiseks lisagem, et alates 01.07.2011 peavad pangad laenupakkumiste tegemisel laenutaotlejale alati esitama ka krediidi kulukuse määra. Pankade kodulehekülgedelt saab erinevat tüüpi laenude korral leida ka tüüpnäited krediidi kulukuse kohta. Loomulikult on eelistatavamad need pakkumised, milles krediidi kulukuse määr on väiksem.

Veel on laenuvõtjale kasulik teada pankade veebilehel paiknevaid **laenukalkulaatoreid**. Kirjeldame põhjalikumalt näiteks Swedbank'i veebilehel paiknevaid laenukalkulaatoreid. Klõpsates lingile „Kodulaenu kalkulaator“, avaneb teil võimalus sisestada soovitav laenusumma, valida tähtaeg, kui kauaks soovite laenu, sisestada intressimäär, millega laenu väljastatakse ning laenuvõtja vanus. Kui vajutata lingile „Arvuta“, väljastab kalkulaator teile kuumakse suuruse, intressikulud kokku ja tulumaksutagastused kokku.

Märgime, et endale kodu ostmiseks laenatud summad on maksuvabad, st, et eelmise aasta jooksul makstud kodulaenu intressidelt saab pärast tuludeklaratsiooni täitmist tagasi tulumaksu jagu. Seejuures ei tohi tagastus ületada 15% kodulaenu võtja aastasissetulekust.

Klõpsates seejärel lingile „Graafik“, väljastab kalkulaator teile maksegraafiku. Kalkulaatoris on võimalus muuta laenu tähtaega, intressimäära ja sel teel näha, kui palju tehtud muudatused mõjutavad kuumakset ja intressikulusid.

Valides „Maksimaalse laenusumma kalkulaatori“, saate sisestada, kas võtate laenu üksi või kellegagi koos, kui palju on teil ülalpeetavaid, sisestada tuleb ka oma viimase 6 kuu keskmine netopalk ning täiendavad igakuised kohustused. Klõpsates lingile „Arvuta“, väljastab kalkulaator maksimaalse võimaliku summa, mida teil on võimalik laenuks saada ning igakuise maksukoormuse.

Valides „Kodulaenu intressimäära muutuste kalkulaatori“, saate välja arvutada laenu kuumakse muutuse juhul, kui muutub baasintressimäär (saab valida erinevaid variante) ja/või marginaal (panga poolt määratud intressimäär).

Kasutades „Pandikulude kalkulaatorit“, on võimalus teada saada, kui palju tuleb maksta antud lepingu pealt riigilõivu ning notaritasu.

Veel saate kasutada spetsiaalset „Autoliisingu kalkulaatorit“, milles on võimalik valida erinevate liisingutüüpide vahel ning vastavalt valitud liisingutüübile määrata maksegraafiku.

„Riikliku õppelaenu kalkulaatoris“ saab valida laenusumma, tagasimakse viisi (kas kord kuus või kord kvartalis), tagasimakseperioodi pikkuse. Ka saab valida, kas vajate maksepuhkust ja kui kauaks ning vastavalt valitud väärtustele leida osamakse suuruse, intressikulu kokku ning maksegraafiku. Õppelaenu nominaalne intress on fikseeritud ja see on 5%.

Veel on võimalik kasutada „Väikelaenu kalkulaatorit“, „Püsimaksega krediitkaardi kalkulaatorit“ ja „Järelmaksu kalkulaatorit“, mida me siinkohal pikemalt ei kirjelda.

Pikaajaliste laenude korral (näiteks eluasemelaenud) tuleb laenu taotlejal arvestada võimalusega, et intressimäär võib laenutähtaja jooksul muutuda. Tavaliselt koosneb intressimäär kahest osast: pangaga kokkulepitud nn baasosa, mis laenutähtaja jooksul ei muutu, ning **kuue kuu Euribor** ehk üleeuroopaline pankadevaheline intressimäär, mis võib muutuda iga kuue kuu järel. Näiteks, kui panga baasintressimäär on 4,2% ja Euribor 1,8%, siis laenu intressimääraks on 4,2% + 1,8% = 6%. Pikaajaliste laenude korral võib Euribor laenutähtaja jooksul muutuda küllaltki palju, isegi suurusjärgus 3–4 protsendipunkti. Tavaliselt on Euribori ühekordne muutus küllalt väike, näiteks 0,6 protsendipunkti ja võib esmapilgul tunduda, et see ei saa laenukoormusele palju mõjuda, kuid see pole nii. Pikaajaliste laenude korral tingivad ka väikesed muudatused laenutingimustes küllaltki suure muutuse laenu teenendamises. Võite selles kergesti veenduda, kasutades eespool kirjeldatud pankade laenukalkulaatoreid või antud kursuse jaoks koostatud veebikalkulaatorit „Eluasemelaen“, varieerides selles väikese suuruse võrra intressimäära. Demonstreerime seda ka järgmise näitega (vt ka märkus 2.6.2).

Näide 2.5.8. Volli võttis 25 aastaks eluasemelaenu 60 000 eurot nominaalse intressimääraga 5,4% igakuise kapitalisatsiooniga.

a) Leida igakuise osamakse suurus, nominaalne kuumaksete kogusumma ja kogu laenu nominaalne intress;

b) Mitu protsenti suureneks kogu makstud intress, kui Euribor oleks antuga võrreldes 0,6 protsendipunkti suurem?

Lahendus.

a) Siin

$$n = 25 \cdot 12 = 300,\ A_{300} = 60000,\ p = i = \frac{5{,}4\%}{12} = 0{,}45\% = 0{,}0045.$$

Järelikult valemi (2.5.1) põhjal

$$60000 = R_1 \cdot \frac{1-(1+0{,}0045)^{-300}}{0{,}0045} \tag{2.5.9}$$

ehk

$$60000 \approx R_1 \cdot 164{,}438547 \Rightarrow$$

$$R_1 = \frac{60000}{164{,}438547} \approx 364{,}88 \text{ eurot.}$$

Nominaalne kuumaksete summa on siis

$$300 \cdot 364{,}88 = 109464 \text{ eurot}$$

ning nominaalne intress

109464 - 60000=49 464 eurot.

b) Kui Euribor suureneks 0,6% võrra, siis nominaalseks intressimääraks oleks 6% ning

$$p = i = \frac{6\%}{12} = 0{,}5\% = 0{,}005.$$

Siis osamakse R_2 arvutamiseks saaksime seose (2.5.9) asemel seose

$$60000 = R_2 \cdot \frac{1-(1+0{,}005)^{-300}}{0{,}005},$$

millest

$$R_2 \approx 386{,}58 \text{ eurot.}$$

Nominaalne kuumaksete summa on siis

$$300 \cdot 386{,}58 = 115974 \text{ eurot}$$

ning nominaalne intress

115974 - 60000=55974 eurot.

Nominaalne intress suureneks siis

$$115974 - 109464 = 6510 \text{ eurot}$$

ehk

$$\frac{6510}{49464} \cdot 100\% \approx 13{,}16\% \text{ võrra.}$$

Seega 0,6 protsendipunktine intressimäära tõus põhjustab intresside suurenemise ligikaudu 13% võrra. Märgime, et antud ülesande lahendamisel saab kasutada ka veebikalkulaatorit „Eluasemelaen“.#

Märkus 2.5.1. Eluasemelaenude puhul kasutatakse tavaliselt **hüpoteeki** (*mortgage, hypothecation)*, st laenu tagatiseks on mingi kinnisvara, milleks enamasti ongi laenu abil ostetav korter või maja. See tähendab, et kui laenuvõtjal tekivad makseraskused ning ta ei suuda enam tasuda igakuist makset, siis võib pank laenu teel soetatud vara endale nõuda või nõuda, et laenuvõtja müüks soetatud eluaseme, et maksta ära pangale võlgu olev summa. Seejuures tagatiseks oleva korteri või maja väärtus on mõnevõrra suurem laenuks antavast summast. See peidab endas veel ühte ohtu laenuvõtja jaoks. Nimelt, kui kinnisvaraturul majade ja korterite hinnad langevad, siis langeb ka laenu tagatiseks oleva hüpoteegi (ehk korteri või maja) väärtus ning uus hind ei tarvitse enam katta laenatud summat. Sellisel juhul võib pank nõuda täiendavaid tagatisi või nõuda eluaseme müümist laenu võtja poolt. Kuid eluaseme hind võib olla langenud isegi sel määral, et müügist saadud summa on väiksem laenatud summast. Järelikult on laenuvõtja ilma eluasemest ning lisaks on veel pangale teatava summa võlgu.

Järgnevas näites võrdleme SMS-laenu, krediitkaarti ja järelmaksu.

Näide 2.5.9. Roobert soovib osta 300 eurot maksva teleri, kuid vajab selleks laenu tähtajaga üks aasta. Milline järgmistest laenuvõtmise võimalustest on soodsaim:

a) SMS-laen kiirlaenufirmalt SMS-Raha;

b) kasutada krediitkaarti, mille puhul tuleb maksta intressi nominaalse intressimääraga 20% iga kuu lõpus olevalt võlajäägilt;

c) osta teler järelmaksuga, kusjuures laenu nominaalne intressimäär on 20% igakuise kapitalisatsiooniga?

Lahendus.

a) Näitest 2.5.5 nägime, et kogu laenu kustutamiseks peab Roobert kiirlaenufirmale tasuma 588 eurot, millest intress moodustab 288 eurot ehk 96% laenu põhisummast.

b) Oletame, et Roobert tegi aasta jooksul krediitkardiga ainult 300 eurot teleri ostu ning vahepeal ta ühtegi tagasimakset võla kustutamiseks ei tee. Siis on 12 kuuga tema võlg krediitkaardil kasvanud (ühe kuu intressimäär on $\frac{20}{12}\% = \frac{5}{3}\%$)

$$300 \cdot \left((1 + \frac{5}{3 \cdot 100}\right)^{12} = 365{,}82 \text{ euroni;}$$

Järelikult intress on 65,82 krooni.

c) Antud juhul kujutab järelmaks endast lihtsat tavaannuiteeti, kus

$$p = i = \frac{20\%}{12} = \frac{5.}{3}\%, \approx 1{,}667\% = 0{,}01667\,, \ n = 12, \quad A_{12} = 300\,.$$

Siis valemist (2.5.1) saame

$$300 = R \cdot \frac{1-(1+0{,}01667)^{-12}}{0{,}01667} \Rightarrow 300 = R \cdot 10{,}79489035 \Rightarrow$$

$$R = \frac{300}{10{,}79489035} \approx 27{,}79 \text{ eurot.}$$

Seega kogu laenumaksete summa on

$$12 \cdot 27{,}79 = 333{,}48 \text{ eurot,}$$

millest intress moodustab 33,48 eurot.

Vastus: kõige vähem tuleb intressi maksta järelmaksu puhul ning seetõttu on see laenuviis kõige soodsam. #

Märkus 2.5.2. Näites 2.5.9 eeldasime, et Roobert krediitkaardi kasutamise korral enne ühe aasta möödumist ühtegi tagasimakset ei tee. Kuid kui Roobert piisava rahavaru olemasolu korral maksab teatava summa enne ühe aasta möödumist tagasi, siis võib krediitkaart osutuda sama kasulikuks kui järelmaks või isegi kasulikumaks, juhul kui Roobert teeb tagasimaksed piisavalt varakult. Seega võib krediitkaarti ja järelmaksu lugeda enam-vähem sama soodsateks. Kindlalt kõige halvem variant on aga SMS-laen. SMS-laenude korral lisame, et eelnevates arvutustes ei võtnud me arvesse lepingu sõlmimisega seotud tasusid ja võimalikke trahve lepingu rikkumise eest. Sageli on esinenud juhtumeid, kus mitteõigeaegne tagasimakse on põhjustanud väga suure trahvi.

Märkus 2.5.3. Tarbimislaenude kohta on Riigikogus 2011. aastal vastu võetud seadus, mille kohaselt ei tohi krediidi kulukuse määr ületada Eesti krediidiasutuste tarbimislaenude kolmekordset keskmist krediidi kulukuse määra. See väärtus on suurusjärgus 25-30%. Näites 2.5.9 variandi a) puhul on krediidi kulukuse määr 300,29% (vt http://www.smsraha.ee/), mis selgelt ületab vastuvõetud seadusega määratud piiri. Seega võib laenuvõtja sellist intressi mitte maksta ja selle kohtus vaidlustada. SMS-laenu krediidi kulukuse määr 300,29% pole midagi erakordset, sest veebist võib kiirlaenufirmade kodulehekülgedelt leida märgatavalt suurema (isegi tuhandetesse protsentidesse ulatuva krediidi kulukuse määraga) laenuvõtmise võimalusi.

2.5.5. Hoiused, säästmine, investeerimine

Kui tekib ülejäävat vaba raha, mida ei ole vajadust koheselt ära kulutada, siis tuleks valida säästmiseks või investeerimiseks sobivaim viis, mis võimaldaks selliselt rahalt võimalikult palju teenida.

Kõige levinumaks raha hoiustamise viisiks on tavaline **arvelduskonto** ehk **nõudmiseni hoius** (*current account* / *demand deposit*). Kuid tuleb arvestada, et intressimäär tavalisel arvelduskontol on äärmiselt madal, näiteks Swedbank'il ja SEB-il on see alates 2013-st aastast vaid 0,01% aastas igakuise kapitalisatsiooniga. Swedbank'is kehtib intresside arvestamisel ja lisamisel järgmine kord: intressid arvestatakse iga päeva lõpus kontol oleva summa pealt, tulemus ümmardatakse 2 kohani peale koma ning arvestatud intress lisatakse kontole 1 kord kuu lõpus. Oletame, et teil on päeva lõpus kontol 1000 eurot, siis selle päeva intressiks on ülalkirjeldatud ümmardamisreegli kohaselt

$$\frac{1000 \cdot 0,0001}{360} = \frac{1}{3600} = 0,00027... \approx 0 \text{ eurot.}$$

Kui oletada, et teil terve kuu (pikkusega 30 päeva) jooksul konto seis ei muutu, siis ühe kuu jooksul lisandunud intress on 0 eurot, sama ka ühe aasta ning mistahes muu tähtaja korral.

SEB pangas on intresside arvestamise kord veidi teine: intressid lisatakse samuti iga kuu lõpus, kuid kuu intress arvutatakse konto keskmise jäägi järgi kogu kuu vältel. Kui oletada nagu ennegi, et kuu vältel on kontojääk konstantselt 1000 eurot, siis SEB panga reeglite kohaselt oleks 30 päevase kuu intress

$$30 \cdot \frac{1}{3600} = \frac{1}{120} = 0,00833... \approx 0,01 \text{ eurot}$$

ehk 1 eurosent. Kui kahe aasta jooksul kontole raha juurde ei panda ega kontolt välja ei võeta, on konto seis kahe aasta pärast liitintresside reegli kohaselt

$$1000 \cdot \left((1 + \frac{0,0001}{12} \right)^{24} = 1000,2 \text{ eurot,}$$

Seega teenitud intress on vaid 20 eurosenti.

Soodsam on kasutada **tähtajalist hoiust** (*term deposit / time deposit*)**.** Tähtajalise hoiuse intressimäärad sõltuvad hoiuse tähtajast ja hoiustatavast summast. Pankade kodulehtedelt leiate tabelid, kus on ära toodud erineva suurusega ja erineva tähtajaga hoiuste intressimäärad.

Näide 2.5.10. Kui suur on intress, kui hoiate tähtajalisel hoiusel 1000 eurot tähtajaga kaks aastat juhul, kui nominaalne intressimäär on 0,56% igakuise kapitalisatsiooniga ja intress makstakse välja üks kord tähtaja lõpus?

Lahendus.

Liitintresside reegli kohaselt siis

$$1000 \cdot \left((1 + \frac{0,0056}{12} \right)^{24} = 1011,26 \text{ eurot,}$$

Vastus: Intress on 11,26 eurot. #

Veelgi suuremat intressi on võimalik teenida, kui paigutada raha mitmesugustesse fondidesse. Sel juhul pole aga intressitulu garanteeritud. Fondide tulusus sõltub mitmesugustest asjaoludest, näiteks üldisest olukorrast maailma finantsturgudel, fondi haldavate inimeste oskusest nende käsutusse antud raha paigutada jne. Seejuures, mida kõrgem on risk (aktsiad on kõrge riskitasemega, võlakirjade riskitase on madalam), seda suuremat tulu on võimalik saada, samas on ka kahju tekkimise võimalused suuremad. St riskantse raha paigutuse korral on võimalus, et fondi tähtaja lõpuks saate tagasi väiksema summa, kui olite fondi investeerinud. Lisaks tuleb fondide puhul arvestada ka teenustasudega: fondi sisenemistasu – see on mingi protsent fondi paigutatud rahast ehk ostetud fondi osakute koguväärtusest ja fondist väljumise tasu – see on fikseeritud protsent fondis olevast summast ehk fondi osakute koguväärtusest fondist väljumise hetkel.

Näide 2.5.11. Swedbank'i Fondifondi 100 - E-osaku aastatootlus antud hetkel on 7,16%. Kui suur on intressitulu, kui ostate selle fondi osakuid 1000 euro eest ja väljute fondist kahe aasta pärast juhul, kui prognoosida, et nende aastate jooksul on igaaastane tootlus samuti 7,16%? Fondi sisenemistasu on 1,5% ja väljumistasu 1%.

Lahendus.

Kahe aasta pärast on ostetud osakute väärtus

$$1000\cdot(1+0,0716)^2 \approx 11148,33 \text{ eurot.}$$

Fondi sisenemis- ja väljumistasu on vastavalt

$$0,015\cdot 1000 = 15 \text{ eurot ja } 0,01\cdot 11148,33 \approx 11,48 \text{ eurot.}$$

Seega antud prognoosi järgi oleks kahe aastaga saadud intressitulu

$$11148,33-(1000+15+11,48)=121,85 \text{ eurot.}$$

Vastus: prognoositav intressitulu oleks $121,85$ eurot. #

Märkus 2.5.4. Võrreldes näites 2.5.10 saadud intressi 11,26 eurot vahetult enne seda näidet kirjeldatud olukorraga, kus 1000 eurot teenis arvelduskontol sama ajaga vaid 20 eurosenti, näeme, et tähtajaline hoius on märksa soodsam. Tähtajalise hoiuse intress on kõrgem seetõttu, et hoiustamistähtaja jooksul ei saa hoiuse valdaja hoiusele pandud raha vabalt kasutada. Kui hoiustaja siiski soovib enne tähtaja lõppu raha hoiuselt välja võtta, kaotab ta üldreeglina juba selleks hetkeks teenitud intressi. Arvelduskontol olevat raha saab aga hoiuse valdaja igal hetkel kasutada. Veelgi suurem on prognoositav intressitulu (121,85 eurot) näites 2.5.11 kirjeldatud juhul, kus ostetakse Swedbank'i Fondifondi 100 - E-osakuid. Kuid tuleb veelkordselt rõhutada, et tegemist on prognoositava tuluga. Kui olukord finantsturgudel halveneb või fondi haldajad ei paiguta raha otstarbekalt, võib kahe aasta pärast fondist väljudes saadav summa olla ka väiksem kui 1000 eurot.

Finantstehingutes kehtib üldine reegel: mida vabamalt on raha kasutatav ehk mida likviidsem (*liquidity*) on raha, seda väiksem on tehingust teenitav intress.

Ka igat liiki hoiuste kalkulaatorid leiate pankade veebilehekülgedelt. Nende kalkulaatorite abiga saate arvutada erinevat liiki tähtajaliste hoiuste kui ka kogumishoiuse hoiustatavatele summadele vastavad intressid. Loomulikult tuleb arvestada, et kehtivad intressimäärad võivad ajas muutuda, siin näidetes kasutatavad intressimäärad on võetud antud õppevahendi kirjutamise ajal kehtinud seisuga.

Märkus 2.5.5. Peale antud punktis kirjeldatud raha paigutamise viiside on võimalus paigutada raha ka aktsiatesse. Aktsiad võimaldavad teenida küll suuremat intressi, kuid nendega käib kaasas ka palju suurem risk kui näiteks eespoolkirjeldatud fondide puhul.

ÜLESANDED

2.5.1. Valdur võttis laenu neljaks aastaks 7000 eurot aastaintressimääraga 14% kapitalisatsiooniga iga kvartali lõpus, mida kustutatakse võrdsete iga kvartali lõpul toimuvate osamaksetega. Leida

a) osamakse suurus;
b) kogu laenu kustutamiseks vajalik nominaalne summa;
c) makstud intresside nominaalne suurus.

2.5.2. Väikefirma võttis laenu kuueks aastaks 15 000 eurot intressimääraga 11% kapitalisatsiooniga iga kvartali lõpus, mida kustutatakse võrdsete iga kvartali lõpul toimuvate osamaksetega. Leida

a) osamakse suurus;
b) kogu laenu kustutamiseks vajalik nominaalne summa;
c) makstud intresside nominaalne suurus.

2.5.3. Perekond Jänes võttis laenu viieks aastaks 12 000 eurot aastaintressimääraga 12% kapitalisatsiooniga iga poolaasta lõpus, mida kustutatakse võrdsete iga poolasta lõpul toimuvate osamaksetega. Leida laenujääk peale kolmandat aastat.

2.5.4. Firma võttis laenu neljaks aastaks 18 000 eurot aastaintressimääraga 15% kapitalisatsiooniga iga kuu lõpus, mida kustutatakse võrdsete iga kuu lõpul toimuvate osamaksetega. Leida laenujääk peale teist aastat.

2.5.5.* Perekond Rebane võttis laenu seitsmeks aastaks 30 000 eurot intressimääraga 9% kapitalisatsiooniga iga kuu lõpus, mida kustutatakse võrdsete iga kuu lõpul toimuvate osamaksetega. Leida 50-nda osamakse intressiks minev summa ja laenu põhisummat kustutav osa.

2.5.6.* Ettevõte võttis laenu viieks aastaks ja kuueks kuuks 55 000 eurot aastase intressimääraga 8% kapitalisatsiooniga iga kvartali lõpus, mida kustutatakse võrdsete iga kvartali lõpul toimuvate osamaksetega. Leida kaheksanda osamakse intressiks minev summa ja laenu põhisummat kustutav osa.

2.5.7.* Perekond Kits võttis laenu neljaks aastaks ja kolmeks kuuks 30 000 eurot intressimääraga 12% kapitalisatsiooniga iga kuu lõpus, mida kustutatakse võrdsete iga kuu lõpul toimuvate osamaksetega. Leida kolmandal aastal makstud intressid.

2.5.8.* Järgnevas tabelis on esitatud andmed laenude kohta, mida kustutatakse võrdsete makseperioodide lõpul toimuvate osamaksetega.

Nr	Laenu põhisumma (eurot)	Laenu-tähtaeg	Makse-perioodi pikkus	Intressi-määr	Kapitali-satsioon aastas	Võlajääk peale
1.	14 000	6 aastat	1 aasta	16%	1	4-ndat makset?
2.	10 000	5 aastat	1 kuu	18%	12	25-ndat makset?
3.	22 000	12 aastat	3 kuud	12%	4	15-ndat makset?
4.	9000	4 aastat	poolaasta	20%	2	5-ndat makset?

Leida iga laenu korral

a) perioodilise osamakse suurus;

b) võlajääk peale tabelis viidatud makset;

c) intress ja põhisummat kustutav osa punktis b) viidatud makseperioodile järgneval perioodil.

2.5.9.* Lembit võttis laenu neljaks aastaks 7000 eurot aastaintressimääraga 15% igakuise kapitalisatsiooniga, mida kustutatakse võrdsete iga kuu lõpul toimuvate osamaksetega. Leida

a) perioodilise osamakse suurus;

b) kogu laenu kustutamiseks vajalik nominaalne summa;

c) makstud intresside nominaalne suurus;

d) võlajääk peale kolmandat aastat;

e) 32-se osamakse intressiks minev summa ja laenu põhisummat kustutav osa;

f) kolmandal aastal makstud intressid.

2.5.10.* Ettevõte võttis laenu kuueks aastaks 65 000 eurot aastaintressimääraga 10% kapitalisatsiooniga iga poolaasta lõpus, mida kustutatakse võrdsete iga poolaasta lõpul toimuvate osamaksetega. Leida

a) perioodilise osamakse suurus;

b) kogu laenu kustutamiseks vajalik nominaalne summa;

c) makstud intresside nominaalne suurus;

d) võlajääk peale neljandat aastat;

e) neljanda osamakse intressiks minev summa ja laenu põhisummat kustutav osa;

f) viiendal aastal makstud intressid.

2.5.11. Laen 10 tuhat eurot võeti viieks aastaks. Kogu laenusumma tasutakse võrdsete osamaksetena iga aasta lõpus ja laenu võlajäägilt makstakse intressi 20% aastas iga-aastase kapitalisatsiooniga. Koostada laenu tasumise graafik, kus eraldi tuua välja iga-aastane osamakse ja selles näidata ära laenu põhisumma tasumiseks minev osa ning intress.

2.5.12. Laen 30 tuhat eurot võeti kolmeks aastaks. Kogu laenusumma tasutakse võrdsete osamaksetena iga poolaasta lõpus ja laenu võlajäägilt makstakse intressi 18% aastas poolaasta lõpul toimuvate kapitalisatsioonidega. Koostada laenu tasumise graafik, kus eraldi tuua välja poolaasta osamakse ja selles näidata ära laenu põhisumma tasumiseks minev osa ning intress.

2.5.13.* Jorma võttis laenu 8000 eurot nominaalse intressimääraga 12% kapitalisatsiooniga igas kuus. Millise ajaga saab Jorma laenu kustutatud, kui osamaksed toimuvad iga kuu lõpus suurusega 500 eurot? Milline on viimase osamakse suurus?

2.5.14. Hannol on krediitkaart, mille kasutamise korral maksab ta pangale intressi iga kuu lõpus arvel olevalt võla jäägilt nominaalse intressimääraga 18%. Eelmise kuu lõpu seisuga oli Hanno pangale võlgu 350 eurot, sel kuul sooritas Hanno krediitkaardiga ostusid 85 euro eest ja maksis pangale tagasi 75 eurot. Määrata

a) selle kuu intress eelmise kuu võlajäägilt;

b) võlajääk selle kuu lõpus;

c) järgmise kuu intress.

2.5.15. Kuunol on krediitkaart, mille kasutamise korral maksab ta pangale intressi iga kuu lõpus arvel olevalt võla jäägilt nominaalse intressimääraga 22%. Eelmise kuu lõpu seisuga oli Hanno pangale võlgu 250 eurot, järgneval viiel kuul Kuuno krediitkaardiga ühtegi tehingut ei teinud, kuuendal kuul sooritas Hanno krediitkaardiga ostusid 125 euro eest ja maksis pangale tagasi 100 eurot. Määrata

a) selle kuu intress eelmise kuu võlajäägilt;

b) võlajääk selle kuu ning teise, kolmanda, neljanda ja viienda kuu lõpus;

c) seitsmenda kuu intress.

2.5.16. 💻 Hülger soovib võtta üheksaks kuuks kiirlaenufirmalt Smslaen laenu 250 eurot. Kui palju peab Hülger maksma laenu kustutamiseks intressi, kui suure osa protsentuaalselt moodustab see laenu põhisummast ja kui suur on aastane intressimäär (lahendamisel kasutada tabelit 2.5.1)?

2.5.17. Leo soovib võtta kuueks kuuks kiirlaenufirmalt Smslaen laenu 200 eurot. Kui palju peab Leo maksma laenu kustutamiseks intressi, kui suure osa protsentuaalselt moodustab see laenu põhisummast ja kui suur on aastane intressimäär (lahendamisel kasutada tabelit 2.5.1)?

2.5.18. Leo soovib võtta SMS-laenu 500 eurot. Laenutingimuste analüüsimiseks kasutab ta veebikalkulaatori „Laenud“ andmeid. Täita mainitud andmeid kasutades järgnev tabel, kus *k* tähistab laenu tähtaega kuudes, *R* – igakuise tagasimakse suurust, *S* – tagasimaksete kogusummat, *I* – makstud intresside kogusummat, *pr* –protsenti, mille *I* moodustab laenatud summast ja *j* – vastavat aastast intressimäära

k	1	2	3	4	5	6
S						
R						
I						
pr						
j						

Täita sama tabel uuesti, võttes 500 euro asemel 1000 eurot. Milliseid järeldusi saab koostatud tabelite põhjal teha?

2.5.19. Laen 3000 eurot anti üheks aastaks ja üheksaks kuuks. Leida krediidi kulukuse määr, kui laen kustutati ühekordse maksega 4000 eurot laenutähtaja lõpus.

2.5.20. Laen 1500 eurot anti üheks aastaks ja kuueks kuuks. Leida krediidi kulukuse määr, kui laen kustutati ühekordse maksega 1900 eurot laenutähtaja lõpus.

2.5.21. Laen 5000 eurot anti kaheks aastaks. Leida krediidi kulukuse määr, kui laen kustutati kahe võrdse osamaksega 2900 eurot üks aasta pärast laenu saamist ja laenutähtaja lõpus.

2.5.22. Väikefirma saab pangalt laenu 40 000 eurot, mis tuleb tagasi maksta seitsme aastaga iga aasta lõpus toimuvate osamaksetega 8000 eurot. Leida krediidi kulukuse määr, kui lepingu sõlmimise kulu krediidi saamiseks on 0,2% laenusummast.

2.5.23. Joosep saab pangalt laenu 12 000 eurot, mis tuleb tagasi maksta kahe aasta jooksul iga kuu lõpus toimuvate osamaksetega 600 eurot. Leida krediidi kulukuse määr, kui lepingu sõlmimisel täiendavaid kulusid krediidi saamiseks ei olnud.

2.5.24. Hjalmar võttis 20 aastaks eluasemelaenu 70 000 eurot nominaalse intressimääraga 6,4% igakuise kapitalisatsiooniga.

a) Leida osamakse suurus, nominaalne kuumaksete kogusumma ja kogu laenu nominaalne intress.

b) Mitu protsenti suureneks kogu makstud intress, kui Euribor oleks antuga võrreldes ühe protsendipunkti võrra suurem?

2.5.25. Eduard võttis 22 aastaks eluasemelaenu 55 000 eurot nominaalse intressimääraga 5,8% igakuise kapitalisatsiooniga.

a) Leida igakuise makse suurus, nominaalne kuumaksete kogusumma ja kogu laenu nominaalne intress.

b) Mitu protsenti suureneks kogu makstud intress, kui Euribor oleks antuga võrreldes 0,5 protsendipunkti võrra suurem?

2.5.26. Perekond Kasepuu võttis 15 aastaks kodu soetamiseks laenu 60 000 eurot aastase intressimääraga 4% igakuise kapitalisatsiooniga. Kui suur on iga kuu lõpus toimuv osamakse, milline on nominaalne kuumaksete kogusumma ja kogu laenu nominaalne intress? Leida mitu protsenti muutuks kogu makstud intress, kui

a) Euribor oleks antuga võrreldes 0,3 protsendipunkti võrra suurem, 0,8 protsendipunkti võrra suurem, 0,3 protsendi-punkti võrra väiksem, 0,8 protsendipunkti võrra väiksem;

b) laenutähtaega suurendada kolme aasta võrra, viie aasta võrra, vähendada kolme aasta võrra, viie aasta võrra;

c) Euribor oleks antuga võrreldes 0,3 protsendipunkti võrra suurem ja laenutähtaega suurendada kolme aasta võrra; Euribor oleks antuga võrreldes 0,8 protsendipunkti võrra suurem ja laenutähtaega suurendada viie aasta võrra;

d) Euribor oleks antuga võrreldes 0,3 protsendipunkti võrra väiksem ja laenutähtaega vähendada kolme aasta võrra; Euribor oleks antuga võrreldes 0,8 protsendipunkti võrra väiksem ja laenutähtaega vähendada viie aasta võrra;

e) Euribor oleks antuga võrreldes 0,3 protsendipunkti võrra suurem ja laenutähtaega vähendada kolme aasta võrra;

f) Euribor oleks antuga võrreldes 0,8 protsendipunkti võrra väiksem ja laenutähtaega suurendada viie aasta võrra.

2.5.27. 30-aastane Raul soovib võtta eluasemelaenu 58 000 eurot. Kasutades Swedbank'i ning SEB panga laenukalkulaatoreid ja

a) valides tähtajaks 20 aastat ja intressimääraks 4,2%, leida kuumakse suurus, intressikulud kokku, tulumaksutagastused kokku, 25-nda ja 50-nda osamakse intressid ja nimiväärtuse kustutamiseks minev summa mõlema panga laenukalkulaatorite puhul;

b) teha kindlaks, kui palju (eurodes) muutuvad summaarsed intressikulud ja summaarsed tulumaksutagastused, kui suurendada intressimäära 0,6, 1,2, 1,8 protsendipunkti võrra, kui palju muutuvad nimetatud kulud protsentuaalselt;

c) teha kindlaks, kui palju (eurodes, protsentides) muutuvad summaarsed intressikulud ja summaarsed tulumaksutagastused, kui vähendada tagasimakse tähtaega, kolme aasta, viie aasta võrra, jättes intressimäära 4,2% muutmata?

Hinnata igal erineval juhul, millise panga tingimused on soodsamad.

2.5.28. 💻 30-aastane Raul soovib võtta eluasemelaenu 58 000 eurot. Kasutades Swedbank'i „Kodulaenu kalkulaatorit“, teha 20 aastase tähtaja ja 4,2% intressimäära puhul kindlaks

a) kas kasulikum on kasutada annuiteeti või võrdsetes põhiosades tagasimakset;

b) kui palju erineksid summaarsed intressid ja summaarsed tulumaksutagastused, kui tegemist oleks 40 aastase inimesega?

2.5.29. 💻 Oletame, et ülesande 2.5.28 andmetele lisaks on Rauli viimase kuue kuu keskmine netopalk 1200 eurot ning tal on kaks ülalpeetavat ja ta võtab laenu üksi. Kasutades Swedbank'i „Maksimaalse laenusumma kalkulaatorit“, määrata maksimaalne võimalik laenusumma, mida Raul võib saada, kui

a) tal muid rahalisi kohustusi ei ole;

b) ta peab maksma igakuist autoliisingu makset suuruses 150 eurot.

2.5.30. 💻 Kalle soovib viieks aastaks liisida 20 000 eurot maksva auto, tehes esimese osamakse, mis moodustab 10% auto maksumusest. Kasutades Swedbank'i ja SEB panga „Autoliisingu kalkulaatorit“, teha kindlaks igakuise makse suurus, kui intressimäär on 6% ja tegemist on

a) jäägita kapitalirendiga;

b) jäägiga kapitalirendiga, kus jääkväärtus on 30%;

c) järelmaksuga jäägita;

d) järelmaksuga jääkväärtusega 30% auto väärtusest;

e) kasutusrendiga.

2.5.31. 💻 Ülesande 2.5.30 andmetel teha kindlaks, kui palju iga erinevat tüüpi liisingu korral muutub igakuise makse suurus, kui

a) esimese osamakse suurust suurendada 5% võrra auto maksumusest;

b) auto jääkväärtust vähendada 10%;

c) intressimäära suurendada 2% võrra.

Juhtudel a) ja b) määrata, kui palju iga erinevat tüüpi liisingu korral muutusid liisinguga seotud nominaalsed kogukulud.

2.5.32. Osvald võttis õppelaenu 3000 eurot tagasimaksetähtajaga 10 aastat. Kasutades Swedbank'i ja SEB panga „Õppelaenukalkulaatorit" teha kindlaks kui suur on igakuine osamakse ning kui suur on summaarne intressikulu, kui maksepuhkus on 12 kuud? Millise panga pakkumine on soodsam?

2.5.33. Swedbank'i „Õppelaenukalkulaatoriga" teha kindlaks, kui palju (eurodes, protsentides) muutub summaarne intressikulu, kui

a) maksepuhkuse periood on kaheksa kuud, neli kuud, null kuud;

b) tagasimaksetähtaega vähendada ühe aasta, kahe aasta, nelja aasta võrra?

2.5.34. Hülger soovib osta 250 eurot maksva Bly-Ray mängija, kuid vajab selleks laenu tähtajaga üheksa kuud. Milline järgmistest laenuvõtmise võimalustest on soodsaim?

a) SMS-laen kiirlaenufirmalt SMS-Raha (kasutada andmeid tabelist 2.5.1);

b) kasutada krediitkarti, mille puhul tuleb maksta intressi nominaalse intressimääraga 22% iga kuu lõpus olevalt võlajäägilt, intress tasutakse pärast üheksa kuu möödumist;

c) osta seade järelmaksuga, kusjuures laenu nominaalne intressimäär on 22% igakuise kapitalisatsiooniga?

2.5.35. Megavald soovib osta 300 eurot maksva külmkapi, kuid vajab selleks laenu tähtajaga üks aasta. Milline järgmistest laenuvõtmise võimalustest on soodsaim?

a) SMS-laen kiirlaenufirmalt Smslaen (kasutada andmeid tabelist 2.5.1);

b) kasutada krediitkarti, mille puhul tuleb maksta intressi nominaalse intressimääraga 18% iga kuu lõpus olevalt võlajäägilt, intress tasutakse peale ühe aasta möödumist,

c) osta külmkapp järelmaksuga, kusjuures laenu nominaalne intressimäär on 18% igakuise kapitalisatsiooniga?

2.5.36. Kui suur on intress, kui hoiate 1500 eurot

a) harilikul Swedbank'i arvelduskontol kahe aasta vältel (ning sellel kontol mingeid tehinguid vaadeldaval perioodil ei tee);

b) tähtajalisel hoiusel tähtajaga kaks aastat nominaalse intressimääraga 2% igakuise kapitalisatsiooniga, kusjuures intress makstakse välja üks kord tähtaja lõpus?

2.5.37. Kui suur on intress, kui hoiate 35 000 eurot

a) harilikul Swedbank'i arvelduskontol kolme aasta vältel (ning sellel kontol mingeid muudatusi vaadeldaval perioodil ei toimu);

b) tähtajalisel hoiusel tähtajaga kolm aastat nominaalse intressimääraga 2,6% igakuise kapitalisatsiooniga, kusjuures intress makstakse välja üks kord tähtaja lõpus?

2.5.38. Jürgenil on kuueks kuuks hoiustamiseks või investeerimiseks 3000 eurot vaba raha. Milline järgnevatest rahapaigutuse viisidest on kasulikum:

a) hoida raha harilikul Swedbank'i arvelduskontol;

b) hoida raha tähtajalisel hoiusel Swedbank'is (intress makstakse välja üks kord tähtaja lõpus);

c) osta Templeton Global Balanced Fund (A Acc) (vt Swedbank'i veebilehekülg) osakuid, kui eeldada, et järgneva kuue kuu tootlus ühtib eelneva kuue kuu tootlusega ?

KIRJANDUST LUGEMISEKS

Ettevõtlikkusest ettevõtluseni: gümnaasiumiõpik. Toimetajad T. Saal jt. Tallinn, SA Teadlik Valik, 2012. Lk 62-63, 168-172.

Majandusõpik gümnaasiumile. Koostajad ja autorid L. Kulu jt. Tallinn, Junior Achievement Eesti AS, 2011. Lk 54-70, 163-172.

Telgmaa, A., Rahandusküsimusi koolimatemaatikas. Tallinn, Kirjastus. „Avita“, 1994. Lk 20-27, 48-52.

ÜLESANNETE VASTUSED

2.2.1. a) $r = 0,065$; $t = 2,5$; b) $r = 0,012$; $t = 11$; c) $r = 0,12$; $t = \frac{135}{360}$; d) $r = 0,09$; $t = 1,75$.

2.2.2. a) n = 7; i = 0,1; b) n = 16; i = 0,0625; c) n = 31; i = 0,02875; d) n = 30; $i \approx$ 0,0133, e) n = 62; $i \approx$ 0,0108. **2.2.3.** a) m = 2 ; b) m = 1; c) m = 4 ;d) m = 12. **2.2.4**. a) i = 13,2%; b) i = 9,4%; c) i = 8,6%. **2.2.5.** 9563,09 eurot. **2.2.6.** 3000 eurolise :investeeringu ja 13% nominaalse intressimäära korral: a) 4328,69 eurot; b) 4377,43 eurot; c) 4403,54 eurot; d) 4421,66 eurot; e) suureneb 1,11%; f) suureneb 1,73%; g) suureneb 2,15%. Üldine järeldus on, et kapitalisatsioonide arvu suurendamine suurendab tulevikuväärtust. **2.2.7.** 1. 684,21 eurot; 2**.** 2560,90 eurot; 3. 5356,62 eurot; 4**.** 11 609,89 eurot; 5. 1140,45 eurot; 6. 2083,24 eurot. **2.2.8.** S = 13 649,14 eurot, intress 5149,14 eurot. **2.2.9.** a) 429 päeva; b) 159 päeva; c) 284 päeva.

2.2.10. a) 700 eurot; b) 15,17 eurot; **c)** 81,18 eurot; d) 910 eurot. **2.2.11.** a) $207,08$ eurot; b) $124,03$ eurot; c) 32,15 eurot. **2.2.12.** 1775,5 eurot. **2.2.13.** 1. $1210,44$ eurot; 2. 3600 eurot; 3. $0,0716$; 4. $0,0848$; **5.** $1,1666$ aastat $\approx$ 14 kuud; **6.** $1,257$ aastat ≈ 453 päeva. **2.2.14.** 3360 eurot. **2.2.15.** 0,1182. **2.2.16.** $1,19048$ aastat ≈ 429 päeva. **2.2.17.** a) 2820 eurot; b) 230 eurot; c) 2750 eurot. **2.2.18.** a) 1494,5 eurot; b) 1447,25 eurot. **2.2.19.** $684,82$ eurot. **2.2.20.** a) koguintress on 396,89 eurot ja tähtpäevaväärtus 10 396,89 eurot; b) koguintress on 402,54 eurot ja tähtpäevaväärtus 10 402,54 eurot. **2.2.21.** kõigi osaperioodide intressid kokku on 265,23 eurot ja konto seis 22. dets. on 6265,23 eurot. **2.2.22.** $11549,48$ eurot. **2.2.23.** 1. $P =$ 266 eurot, intress 39,90 eurot; 2. $P = 705$ eurot, $r \approx$ 13,86%; 3. $P \approx 345$ eurot, S = 374,67 eurot; 4. $P =$ 320 eurot, $r \approx 1{,}58\%$; **5.** P = 678 eurot, $t \approx 0,996395$ aastat $\approx$.359 päeva; **6.** $P \approx 652{,}01$ eurot, I = 49,99 eurot. **2.2.24.** $S \approx 2573,30$ eurot, intress 873,30 eurot. **2.2.25.** 21 304,05 eurot. **2.2.26.** $2058,31$ eurot. **2.2.27.** 1. 300,93 eurot; 2. 572,05 eurot; 3. 245,31 eurot; 4. 205,59 eurot; **5.** 1512,24 eurot; 6. 806,72 eurot. **2.2.28.** $1525,05$ eurot. **2.2.29.** 1. $j \approx 12,71\%$, 2. $j \approx 12,51\%$, 3. $j \approx 9,25\%$, 4. $j \approx 13,61\%$, 5. $j \approx 12,70\%$, 6. $j \approx 9,07\%$. **2.2.30.** a) $0,0878$; b) $0,0850$; c) $0,0844$. **2.2.31.** 1. $\approx 7,9$; 2. $\approx 16,7$; 3. $\approx 23{,}1$; 4. $\approx 38,3$; **5.** $\approx 50,8$; 6. $\approx 27,6$. **2.2.32.** a) $t = 8\frac{1}{3}$ aastat = 8 aastat ja 4 kuud; b) $n \approx 6{,}116$ aastat ehk 6 aastat ja 42 päeva; c) $n \approx 23,45$ kvartalit ehk 5 aastat ja 311 päeva. **2.2.33.** a) ligikaudu 11,11 aasta ehk 11 aastat ja 40 päeva; b) ligikaudu 6,64 aastat ehk 6 aastat ja 231 päeva. **2.2.34.** 12% intressimäära korral järgmise tabeli:

k	0	1	3	5	8	12	13	15	18	24	30
S_r	7000	7070	7210	7350	7560	7840	7910	8050	8260	8680	9100
S_j	7000	7066,4	7201,1	7338,4	7549,3	7840	7914,3	8065,3	8297	8780,8	9292,7

Aastase tähtaja korral S_r ja S_j ühtivad; aastast väiksema tähtaja korral $S_r > S_j$, aastast suurema tähtaja korral $S_r < S_j$. Seejuures, mida suurem on investeeringu põhisumma või mida suurem on intressimäär, seda suurem on S_r ja S_j vaheline erinevus. **2.3.1.** 3325,42 eurot. **2.3.2.** Kasulikum pilet kohe välja osta. **2.3.3.** 420 eurot. **2.3.4.** 1156,80 eurot. **2.3.5.** Poole aasta pärast $2967,37$ eurot, võla nimiväärtus $2773,24$ eurot. **2.3.6.** $646,81$ eurot. **2.3.7.** 480,89 eurot.**2.3.8**. 1074,13 eurot. **2.3.9.** 2234,10 eurot. **2.3.10.** a) 1869,50 eurot; b) 4277,28 eurot. **2.3.11.** 1087,76 eurot. **2.3.12.** 8777,37 eurot. **2.3.13.** 5093,51 eurot. **2.3.14.** 728 eurot. **2.3.15.** 637,6 eurot. **2.3.16.**

$1672,5$ eurot. **2.3.17.** 699,41 eurot. **2.3.18.** $V \approx 391,64$ eurot, diskonto on 8,36 eurot. **2.3.19.** $V = 909,44$ eurot, diskonto on 31,84 eurot. **2.3.20.** $1526,76$ eurot. **2.3.21.** $1230,51$ eurot. **2.3.22.** $V \approx 2167,26$ eurot, diskonto 832,74 eurot. **2.3.23.** $V \approx 3282,89$ eurot, diskonto 1217,11 eurot. **2.3.24.** $V \approx$ 4352,52 eurot, diskonto 1647,48 eurot. **2.3.25.** $2850,90$ eurot. **2.3.26.** ligikaudu 1066 päeva. **2.3.28.** hinnaindeks 140, hind nelja aasta eest 714,29 eurot. **2.3.29.** $I_p \approx 126,82$, inflatsioonimäär aastas 26,82%. **2.3.30.** $I_p \approx 106,13$, aastainflatsioonimäär 6,13%. **2.3.31.** Nominaalne tulevikuväärtus 1620 eurot, nominaalne juurdekasv 102,43 eurot, reaalne tulevikuväärtus $1532,42$ eurot, reaalne juurdekasv $32,42$ eurot. **2.3.32.** Nominaalne tulevikuväärtus $2102,43$ eurot, nominaalne juurdekasv 120 eurot, reaalne tulevikuväärtus 1871,32 eurot, reaalne juurdekasv –128,68 eurot, st kahanemine 128,68 euro võrra. **2.3.33.** reaalne tulevikuväärtus $505257,4$ eurot, reaalne juurdekasv 5257,4 eurot. **2.3.34.** 247,89 eurot. **2.3.35.** $17276,75$ eurot. **2.4.1.** 1. tulevikuväärtus 10 717,2 eurot, nüüdisväärtus 6522,82 eurot; **2.** tulevikuväärtus5325,56 eurot, nüüdisväärtus 4420,18 eurot; 3. tulevikuväärtus 6440,04 eurot, nüüdisväärtus 2995,36 eurot; 4. tulevikuväärtus 22119,09 eurot, nüüdisväärtus 10466,23 eurot; 5. tulevikuväärtus 6628,52 eurot, nüüdisväärtus 3386,30 eurot. **2.4.2.** 1. tulevikuväärtus $12646,3$ eurot, nüüdisväärtus $7696,93$ eurot; 2. tulevikuväärtus 5392,13 eurot, nüüdisväärtus $4475,43$ eurot; 3. tulevikuväärtus $6601,04$ eurot, nüüdisväärtus $3070,24$ eurot; 4. tulevikuväärtus $23\,114,45$ eurot, nüüdisväärtus $10\,937,21$ eurot; 5. tulevikuväärtus $6843,95$ eurot, nüüdisväärtus $3496,36$ eurot. **2.4.3.** Tulevikuväärtus 881 771,28 eurot, nüüdisväärtus 461823,2 eurot. **2.4.4.** 161 795,89 eurot. **2.4.5.** a) 24 979,01 eurot; b) 9000 eurot; c) 15 979,01 eurot. **2.4.6.** $21\,519,77$ eurot **2.4.7.** Korteri maksumus 38 146,27 eurot, intressid 7453,73 eurot. **2.4.8.** kümne aastaga oli kogunenud $47892,95$ eurot, nüüdisväärtus oli $13\,325,06$ eurot. **2.4.9.** 47 704,74 eurot. **2.4.10.** 60 aastaselt. **2.4.11.** 583,93 eurot. **2.4.12.** 1. $392,97$ eurot; 2. $1130,80$ eurot; 3. $1010,24$ eurot; 4. $209,02$ eurot; 5. 1544 eurot; 6. $181,84$ eurot. **2.4.13.** 1. 1285 päeva; 2. Ligikaudu 9,1 aastat; 3. Ligikaudu 19,2 aastat; 4. 40 kuud 9 päeva; 5. 22 aastat 11 kuud 4 päeva; 6. 34 kuud 13 päeva. **2.4.14.** Laenutähtaeg oli 25 aastat ja 5 kuud, makstud intress 47 511,81 eurot. **2.4.15.** a) 18 aastat ja 9 kuud; intresside nominaalväärtus 27 882,4 eurot; b) 15 aastat ja 5 kuud; intresside nominaalväärtus 22 278,7 eurot; b) variandi korral makstakse intressi vähem 5603,7 eurot võrra. **2.4.16.** 3,34%. **2.4.17.** 11,25% **2.4.18.** a) $21\,428,57$ eurot; b) $16\,875$ eurot. **2.4.19.** 22 727,27 eurot. **2.4.20.** 1600 eurot. **2.5.1.** a) 578,79 eurot, b) 9260,64 eurot, c) 2260,64 eurot. **2.5.2.** a) $699,12$ eurot; b) $16\,778,88$ eurot; c) $9778,88$ eurot. **2.5.3.** 5649,57 eurot. **2.5.4.** 10 331,88 eurot. **2.5.5.** Intressiks minev summa 111,07 eurot, nimiväärtust kustutav osa 371,60 eurot. **2.5.6.** intressiks minev summa 800,44 eurot, nimiväärtust kustutav osa 2314,29 eurot. **2.5.7.** 1739,85 eurot. **2.5.8.** 1a) 3799,46 eurot, 1b) 6099,01 eurot, 1c) intress 975,84,64 eurot, nimiväärtust kustutav osa 2823,62 eurot; 2 a) 253,93 eurot, 2b) 6875,42 eurot; 2c) intress 103,13 eurot, nimiväärtust kustutav osa 150,80 eurot; 3a) 870,71 eurot, 3b) 18 021 eurot; 3c) intress 540,63 eurot, nimiväärtust kustutav osa 330,08 eurot; 4a) 1687 eurot, 4b) 4195,31 eurot, 4c) intress 419,53 eurot, nimiväärtust kustutav osa 1267,47 eurot. **2.5.9.** a) 194,82 eurot; b) 9351,36 eurot, c) 2351,36 eurot; d) 2158,21 eurot; e) Intress 37,09 eurot, põhiosa 157,73 eurot; f) 478,27 eurot. **2.5.10**. a) 7333,65 eurot, b) 88003,8 eurot, c) 23003,8 eurot, d) 26004,76 eurot, e) intress 2606,32 eurot, nimiväärtust kustutav osa 4727,33 eurot, f) 2298,85 eurot. **2.5.11.** Osamakse 3343,80 eurot.

Aasta k	Võlajääk $L_{k\text{-}1}$	Aastane osa-makse $R = d_k + 1_k$	Põhisummat kustutav osa d_k	Intressid I_k
1	10 000	3343,80	1343,8 (2)	2000 (1)
2	8656,2 (3)		1612,56 (5)	1731,24 (4)
3	7043,64 (6)		1935,07 (8)	1408,73 (7)
4	5108,57 (9)		2322,09 (11)	1021,71 (10)
5	2786,48 (12)		2786,5 (14)	557,30 (13)

2.5.12. poolaasta makse 6687,59 eurot.

Aasta k	Võlajääk $L_{k\text{-}1}$	Aastane osa-makse $R = d_k + 1_k$	Põhisummat kustutav osa d_k	Intressid I_k
1	30 000	6687,59	3987,59 (2)	2700 (1)
2	26 012,41 (3)		4346,47 (5)	2341,12 (4)
3	21665,94 (6)		4737,65 (8)	1949,94 (7)
4	16 928,29 (9)		5164,04 (11)	1523,55 (10)
5	11 764,25 (12)		5628,81 (14)	1058,78 (13)
6	6135,44 (15)		6135,4 (17)	552,19 (16)

2.5.13. 18 kuud, 261,80 eurot. **2.5.14.** a) 5,25 eurot; b) 365,25 eurot; c) 5,48 eurot. **2.5.15.** a) 23,73 eurot; b) 300,74 eurot; c) 5,50 eurot. **2.5.16.** 218 eurot, 87,2%, aastane intressimäär 177,46%. **2.5.17.** 160 eurot, 80%, aastane intressimäär 238,86%.. **2.5.18.** 500 eurolise laenu korral järgmise tabeli:

k	1	2	3	4	5	6
S	640	700	795	852	900	978
R	640	350	265	213	180	163
I	140	200	295	352	400	478
pr	28	40	59	70,4	80	95,6
j (%)	336	308,30	327,86	304,07	281,26	280,09

Laenutähtaja pikendamine toob endaga kaasa intressideks makstava osa protsentuaalse suurenemise laenatud summast. Laenusumma suurendamine jätab intressideks makstava summa protsentuaalse osakaalu laenatud summast peaaegu samaks. Laenatud summa suurenemisel suurenevad *S, R* ja *I* laenatud summaga peaaegu samas proportsioonis.

2.5.19. Ligikaudu 17,87%. **2.5.20.** Ligikaudu 17,07%. **2.5.21.** Ligikaudu 10,49%. **2.5.22.** Ligikaudu 9,23%. **2.5.23.** Ligikaudu 19,75%. **2.5.24.** a) igakuine makse 516,15 eurot, nominaalne kuumaksete kogusumma 123 876 eurot, nominaalne intress 53 876 eurot; b) ligikaudu 19,76%. **2.5.25.** a) igakuine makse 369,22 eurot, nominaalne kuumaksete kogusumma 97 474,08 eurot, nominaalne intress 42 474,08 eurot; b) ligikaudu 10%. **2.5.26.** Igakuise osamakse suurus 443,81 eurot, nominaalne kuumaksete kogusumma 79886,3 eurot ja kogu laenu nominaalne intress 19886,3 eurot. a) kasv vastavalt 8,21% ja 22,12%, kahanemine vastavalt 21,42% ja 8,12%; b) kasv vastavalt 22,,02% ja 37,09,12%, kahanemine vastavalt 35,15% ja 21,32%; c) kasv vastavalt 32,19% ja 68,21%; d) kahaneb vastavalt 27,62% ja 48,76%; e) kahaneb 14,96%; f) suureneb 7,17%. **2.5.34.** Järelmaksuga. **2.5.35.** **J**ärelmaksuga. **2.5.36.** a) 0 eurot; b) 16,89 eurot. **2.5.37.** a) 10,8 eurot; b) 72,11 eurot. **2.5.38.** Juhul c), kuid selline tulu pole garanteeritud.