

4. MAJANDUSES KASUTATAVAID FUNKTSIOONE

Ants Aasma, Riina Timmermann

Sissejuhatus

Igapäevases majandustegevuses tuleb pidevalt langetada otsuseid, teha valikuid. Eesmärgiks võib olla tõhusam tegutsemine piiratud ressursside tingimustes, suurema kasumi või tulu teenimine, suurema turuosa hõivamine, kapitali võimalikult kasulik investeerimine jne. Majandusteaduse üheks eesmärgiks on ka majanduses toimuvate protsesside kirjeldamine ja seeläbi nende parem mõistmine. Et ülalkirjeldatud eesmärgi saavutada, on otstarbekas kasutada majandusnähtuste ja -protsesside uurimisel **mudeleid**.

Mudel (*model*) väljendab seost või seoste kogumit, mis kirjeldab uuritava nähtuse või protsessi teatud omadusi.

Mudel peaks võimalikult täpselt kirjeldama reaalsust, kuid olema samal ajal piisavalt lihtsustatud ja ülevaatlik, võimaldades teha üldistavaid järeldusi uuritava objekti kohta. Loomulikult ei saa kõike majanduses toimuvat iseloomustada ainult ühe mudeliga. Seepärast valitakse välja hetkel uurija arvates olulisemad omadused, mille kohta mudel koostada ning jäetakse ülejäänud kõrvale.

Igapäevases tegevuses võib ju arvata, et majandusprobleemide lahendamiseks piisab ka nõ „tervest mõistusest“ või intuitsioonist. Kuigi ka nimetatuid ei tasu alahinnata, võib juhtuda, et ei suudeta kasutada ära kogu võimalikku kättesaadavat informatsiooni. Samuti võidakse teha valesid oletusi majandussuuruste vaheliste seoste kohta, ei kasutata tänapäeva arvutustehnika võimalusi. Seepärast on siiski kasulik võtta kasutusele mudelid. Majandusnähtuste modelleerimist vaadeldakse lähemalt peatükis 7. Mudeleid kirjeldavateks seosteks on sageli funktsioonid, mis esitavad põhjuslikke seoseid erinevate majandussuuruste vahel. Järgnevalt kirjeldamegi lihtsamaid majanduses kasutatavaid funktsioone.

4.1. Funktsiooni mõiste, selle esitusviisid

Kõigepealt tuletame meelde funktsiooni mõiste ja funktsiooni põhilised esitusviisid, mida vajame järgnevate teemade käsitlemisel.

Eeskirja, mis seab sõltumatu muutuja igale väärtusele vastavusse sõltuva muutuja mingi ühe kindla väärtuse, nimetatakse **funktsiooniks**. Sõltumatut muutujat nimetatakse funktsiooni

argumendiks. Argumendi väärtuste järgi leitud sõltuva muutuja vastavaid väärtusi nimetatakse **funktsiooni väärtusteks.**

Näiteid:

1) Sõltumatuks muutujaks on õpilase järjekorranumber klassipäevikus, sõltuvaks muutujaks tema ajaloo II veerandi hinne.

2) Sõltumatuks muutujaks on kellaaeg (ühe päeva täistunnid), sõltuvaks muutujaks õhu-temperatuur koolimaja ees.

3 Avaldises $y = 2x + 3$ on sõltumatu muutuja x , sõltuv muutuja on y .

4) Tabelis

x	-2	0,5	1	4
y	8	-2	-4	-16

on sõltumatu muutuja x , sõltuv muutuja y . Oluline on see, et argumendi antud väärtusele vastab täpselt üks funktsiooni väärtus.

Funktsiooni esitusviisid on järgmised:

1) **Analiüütiline esitus** ehk **valem.** Esitame mõned näited, kus a , b ja c on konstandid ehk parameetrid, x sõltumatu muutuja ning y sõltuv muutuja:

lineaarfunktsioon: $y = ax + b$,

võrdeline seos: $y = ax$,

pöördvõrdeline seos: $y = \frac{a}{x}$,

ruutfunktsioon: $y = ax^2 + bx + c$,

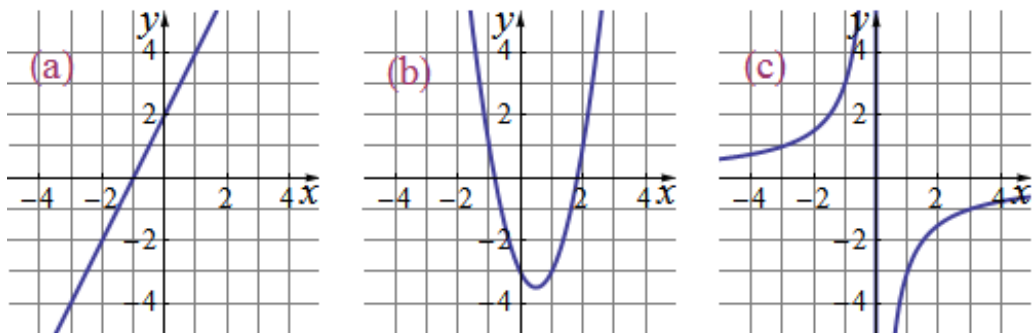
kõikvõimalikud muud funktsioonid, näiteks:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2, & \text{kui } -1 \leq x < 0, \\ x + 2, & \text{kui } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

2) **Tabel.** Funktsioone esitatakse tihti tabelite abil. Mõnikord polegi muud võimalust, sest praktikas leitakse sageli seos suuruste vahel katseliselt. Näiteks järgnevas tabelis on esitatud bensiini kulu auto liikumiskiiruse funktsioonina (kiirus on sõltumatu muutuja ja bensiini kulu sõltuv muutuja):

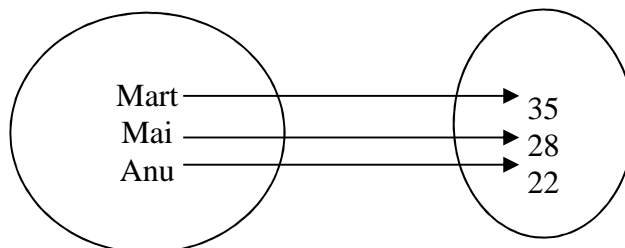
Kiirus, km/h	30	60	80	100	120
Bensiini kulu, l	11	9	10	11	12

3) **Graafik.** Mõningatel juhtudel annab vaadeldavast seosest hea ülevaate graafiline esitus. Joonisel 4.1.1 on kujutatud eespool mainitud lineaarfunktsiooni, ruutfunktsiooni ja pöörd- võrdelise seose graafikuid.



Joonis 4.1.1. Lineaarfunktsioon (a), ruutfunktsioon (b), pöördvõrdeline seos (c).

4) **Nooldiagramm.** Paljudel juhtudel annab olukorrast piltliku ülevaate ning võimaldab probleemi paremini mõista nn nooldiagramm. Igal inimesel on kindel vanus. Seega igale inimesele saame vastavusse seada ühe arvu – tema vanuse täisaastates. Inimese “vanus” on funktsioon, mille määramispiirkonnaks on inimeste hulk ja muutumispiirkonnaks mitte-negatiivsete täisarvude hulk. Kirjeldatud seos on kujutatud joonisel 4.1.2 esitatud nooldiagrammi abil.



Joonis 4.1.2. Inimeste vanust kujutav nooldiagramm

5) **Järjestatud arvupaarid.** Funktsiooni saab esitada ka järjestatud arvupaaride $(x; y)$ hulkana, kus x on sõltumatu muutuja ning y sõltuv muutuja. Seejuures ei tohi x omada erinevates paarides ühesugust väärtust. Näiteks arvupaaride $(0; 3)$ $(1; 5)$ $(2; 7)$ $(3; 9)$ hulk esitab teatavat funktsiooni; paaride $(0; 3)$ $(0; 5)$ hulk aga funktsiooni ei esita.

6) **Sõnaline ehk verbaalne formuleering.** Leidub selliseid funktsioone, mille graafikut pole võimalik esitada või mille esitus valemiga on keeruline ega anna olukorrast head ülevaadet.

Näiteid:

1) Dirichlet funktsioon

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \text{ on ratsionaalarv,} \\ 0, & \text{kui } x \text{ on irratsionaalarv.} \end{cases}$$

2) Arvu alumise täisosa funktsioon $y = \lfloor x \rfloor$, kus $\lfloor x \rfloor$ tähistab suurimat täisarvu, mis ei ületa arvu x ; arvu ülemise täisosa funktsioon $y = \lceil x \rceil$, kus $\lceil x \rceil$ tähistab vähimat täisarvu, mis pole väiksem kui arv x .

Märgime, et reaalsel olukorda kirjeldavad funktsioonid (ka majandusfunktsioonid) ei sõltu enamasti ainult ühest muutujast. Näiteks risküliku pindala sõltub kahest muutujast: laiusel ja pikkusel, leiva tootmine sõltub päris mitmest tegurist: toorainest, veest, jahust, ahjust, küpsetamise temperatuurist jne. Kuid antud kursuses vaatleme siiski vaid ühe muutuja funktsioone. Majanduses on tähtsamateks funktsioonideks nõudlus-, pakkumis-, kulu-, tulu- ja kasumifunktsioonid, mida järgnevas osades 4.2 ja 4.3 ka käsitleme.

Rääkides funktsioonidest majanduses, on oluliseks küsimuseks, kuidas reaalsel majandus-situatsiooni kirjeldavad funktsioonid saadakse. Püstitatud küsimus kuulub matemaatilise modelleerimise valdkonda. Praktikas enamlevinud meetodiks on regressioonanalüüs, mida käsitletakse käesoleva õpperaamatu osas 7.

Ü ! ÜLESANDED

4.1.1. Kolme taksofirma sõiduhinnad on esitatud järgnevas tabelis

FIRMA	Sõidu alustamise tasu (eurodes)	1 km sõidu hind päeval (eurodes)
Firma A	2,88	0,65
Firma B	1,99	0,49
Firma C	2,50	0,42

Esitada erinevate firmade taksosõidu maksumus lineaarfunktsioonina.

Kui palju maksab 30 km, 7 km, 14 km pikkune sõit nende taksodega?

4.1.2. Jüri vanavanaema kogub raha sukasäärde, lisades iga kuu pensionipäeval juba kogutud summale 2,5 eurot. Tal on praeguse seisuga kogutud 52,5 eurot.

a) Mitu kuud on vanavanaema juba raha kogunud?

b) Kirjutada seos vanavanaema kogutud rahahulga R ja aja t (kuudes) vahel. Konstrueerida graafik.

L! KIRJANDUST LUGEMISEKS

Kaasa, A. Majandusteaduse matemaatilised alused. Tartu: Tartu Ülikooli Kirjastus, 2002. Lk 9-24.

Aasma, A., Kallam, H., Levin, A., Majandusmatemaatika alused. Tallinn: Kirjastus „Ilo“, 2005. Lk 84-89.

4.2. Nõudlus- ja pakkumisfunktsioonid, turutasakaal

Nõudlus ja pakkumine moodustavad turu kaks poolust – ühel pool on ostjad (tarbijad), kes nõuavad turul kaupu ja teenuseid, et rahuldada oma vajadusi ning teisel pool müüjad (tootjad), kes kasumi saamise eesmärgil pakuvad tarbitavaid hüviseid. Et turg oleks tasakaalus, on tarvis välja selgitada need mõjurid, mis kujundavad nõudlust ja pakkumist. Nõudluse ja pakkumise vahekorra reguleerimine ning nendevaheliste seoste matemaatiline modelleerimine on majandusteadlaste tähelepanu pälvinud juba enam kui sajand tagasi. Esimesena formuleeris matemaatiliste funktsioonidena nõudluse ja pakkumise prantsuse majandusteadlane Antoine Augustin Cournot (1801 –1877) 1838. a. Prantsusmaal ilmunud töös “Rikkuse teooria matemaatiliste printsiipide uurimine” (*Researches on the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*).

Tarbija valmidus osta teatud kogus kaupa, samuti tootja valmidus pakkuda mingi kogus kaupa sõltub mitmetest teguritest, näiteks toote ühikuhind, tarbija sissetulek, sama kaupa pakkuvate teiste tootjate arv jne. Kuid kõige enam on nõudlus ja pakkumine seotud hinnaga. Kui kõik teised tegurid peale **hinna** (*price*) fikseerida, siis saame **nõutava koguse** q (ehk q_D) (*quantity demanded*), so koguse, mida tarbijad suudavad ja soovivad osta kindlal ajaperioodil, sõltuvalt hinnast p .

Nõudlusfunktsioon (*demand function*) on funktsioon, mis kirjeldab seost nõutava koguse q (või q_D) ja toote ühikuhinna p vahel.

Kui kõik teised tegurid peale hinna p fikseerida, siis saame **pakutava koguse** q (ehk q_S) (*quantity supplied*), so koguse, mida tootjad soovivad ja suudavad pakkuda kindlal ajaperioodil, sõltuvalt hinnast p .

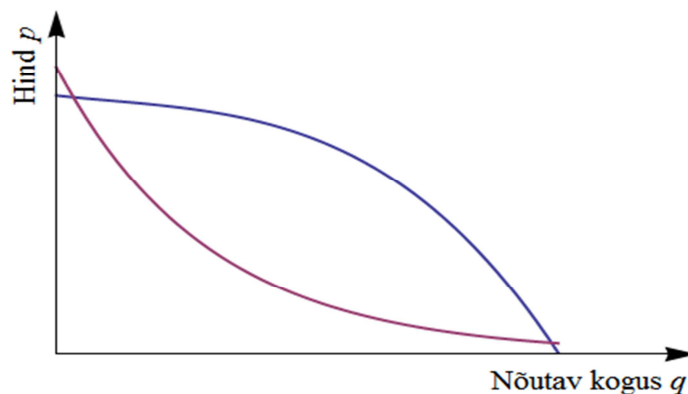
Pakkumisfunktsioon (*supply function*) on funktsioon, mis kirjeldab seost pakutava koguse q (või q_S) ja toote ühikuhinna p vahel.

Veel kasutatakse mõisteid nõudluskõver ning pakkumiskõver. **Nõudluskõver** (ehk **nõudlusjoon**) (*demand curve*) on nõudlusfunktsiooni graafik, mille iga punkt näitab kaubakogust, mida tarbijad soovivad ja tegelikult suudavad antud hinnataseme juures osta. **Pakkumiskõver** (ehk **pakkumisjoon**) (*supply curve*) on pakkumisfunktsiooni graafik, mille iga punkt näitab kaubakogust, mida pakkujad soovivad ja on realselt võimelised antud hinnataseme juures turule müügiks tooma.

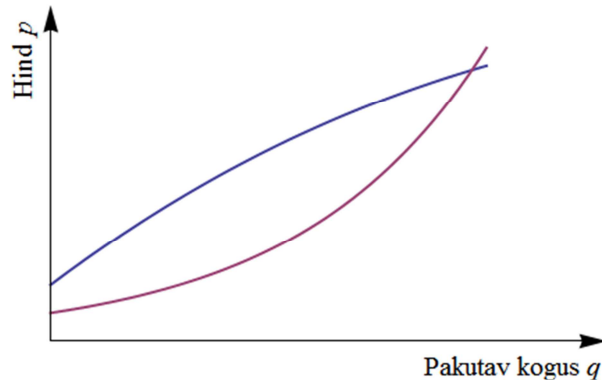
Märkus 4.2.1. Ajalooliselt on majandusteadlased harjunud ülalkirjeldatud funktsioonide $q_D = f(p)$ ja $q_S = g(p)$ asemel kasutama nende pöördfunktsioone $p = f^{-1}(q_D)$ ja $p = g^{-1}(q_S)$. Siiski ei kasuta majandusteadlased terminit „pöördfunktsioon“. Ka kujul $p = f^{-1}(q_D)$ ja $p = g^{-1}(q_S)$ esitatud funktsioonide kohta kasutatakse lihtsalt vastavalt terminit „nõudlusfunktsioon“ ning „pakkumisfunktsioon“. Sellest johtuvalt kujutatakse nende funktsioonide graafilisel esitamisel hinda p vertikaalteljel ja kogust q horisontaalteljel ning seepärast järgime ka meie väljakujunenud tava.

Mida kõrgem on tooteühiku hind, seda väiksemas koguses seda toodet nõutakse. Järelikult tavapäraselt (välja arvatud nn Giffeni kaupade korral) **nõutav kogus suureneb hinna kahanemisel**, st nõudlusfunktsioon on **kahanev funktsioon** (vt joonis 4.2.1). Teisalt, mida kõrgem on hind, seda kõrgem on tootja motivatsioon kauba tootetavate koguste suurendamiseks, st **pakutav kogus suureneb hinna kasvamisel**, järelikult **pakkumisfunktsioon on kasvav funktsioon** (vt joonis 4.2.2).

Näide 4.2.1. Kas seosed $2p + q - 100 = 0$ ja $2p - q - 100 = 0$ võivad esitada mingi kauba või teenuse nõudlust või pakkumist?



Joonis 4.2.1. Nõudlusfunktsioone.



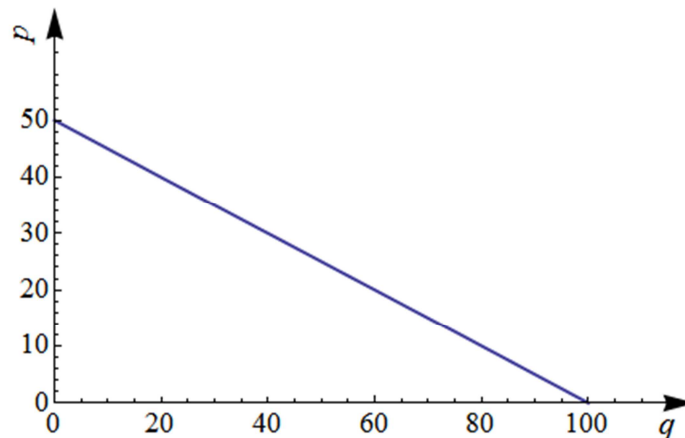
Joonis 4.2.2. Pakkumisfunktsioone.

Lahendus.

Avaldame seosest $2p + q - 100 = 0$ nii muutuja q kui ka muutuja p :

$$q = 100 - 2p \text{ ja } p = 50 - 0,5q.$$

Mõlemast seosest näeme, et p suurenemisel q kahaneb, st kui p tähistab hinda ja q kogust, siis mõlemad saadud funktsioonid rahuldavad nõudlusfunktsioonile esitatavaid nõudeid. Seega seos $2p + q - 100 = 0$ võib esitada teatava kauba nõudlust, kusjuures funktsioonid $q = 100 - 2p$ ja $p = 50 - 0,5q$ esitavad ühte ja sama nõudlust (ehk tegemist on sama nõudluskõveraga, vt joonis 4.2.3).



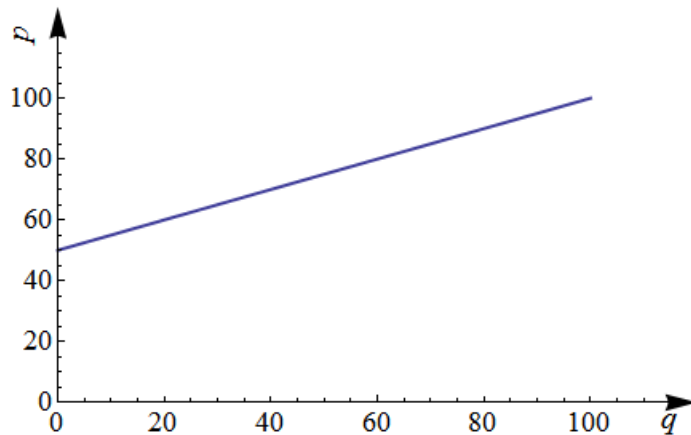
Joonis 4.2.3. Lineaarne nõudlusfunktsioon $p = 50 - 0,5q$.

Avaldame seosest $2p - q - 100 = 0$ nii muutuja q kui ka muutuja p :

$$q = 2p - 100 \text{ ja } p = 50 + 0,5q.$$

Mõlemast seosest näeme, et p suurenemisel q suureneb, st mõlemad saadud funktsioonid rahuldavad pakkumisfunktsioonile esitatavaid nõudeid. Seega seos $2p - q - 100 = 0$ võib esitada

teatava kauba pakkumist, kusjuures funktsioonid $q = 2p - 100$ ja $p = 50 + 0,5q$ esitavad ühte ja sama pakkumist (ehk tegemist on sama pakkumiskõveraga, vt joonis 4.2.4). #



Joonis 4.2.4. Lineaarne pakkumisfunktsioon $p = 50 + 0,5q$.

Näites 4.2.1 esitatud nõudlus- ja pakkumisfunktsioonid olid lineaarsed. Kuigi reaalses turusituatsioonides on nii nõudlus- kui ka pakkumisfunktsioon harilikult mittelineaarsed (näiteks, ruut-, kuup- või mõni veelgi keerukam funktsioon), on majandusmodelite uurimisel sageli kasulik (lihtsuse huvides) eeldada, et need on lineaarsed.

Lineaarne nõudlus- ja pakkumisfunktsioon on esitatavad üldiselt kujul

$$p(q) = b + a \cdot q \quad \text{või} \quad q(p) = b_1 + a_1 \cdot p \quad (4.2.1)$$

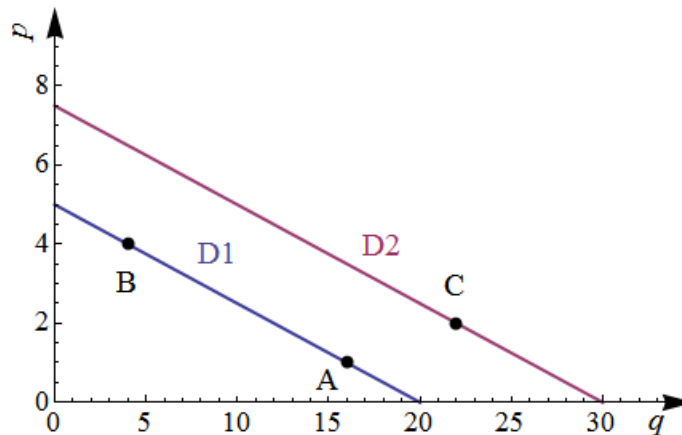
kus p on hind ja q on vastavalt nõutav või pakutav kogus ning a, b, a_1, b_1 on arvud.

Kuna hinna kasvades nõutav kogus väheneb ning pakutav kogus suureneb, siis **negatiivsete kordajate a ja a_1 korral on seoses (4.2.1) olevad funktsioonid nõudlusfunktsioonideks, positiivsete kordajate a ja a_1 korral aga pakkumisfunktsioonideks** (vaadake veelkord näites 4.2.1 esitatud nõudlus- ja pakkumisfunktsioone).

Väärtust p_0 , mille korral nõutav kogus on 0 ($q = 0$), nimetatakse **piirhinnaks** (*limit price*).

Märkus 4.2.2. Vahet tuleb teha mõistete **nõudlus** ja **nõutav kogus** ning mõistete **pakkumine** ja **pakutav kogus** vahel. Olgu meil antud näiteks nõudlusfunktsioon (ehk **nõudlusjoon**) $q = 20 - 4p$ (joonisel 4.2.5 märgitud sümboliga D1). Näeme, et punkt A koordinaatidega $p = 1$ ja $q = 16$, ning punkt B koordinaatidega $p = 4$ ja $q = 4$ kuuluvad mõlemad nõudlusjoonele D1. Liikumine punktist A punkti B mööda nõudlusjoont D1 ei tähenda nõudluse muutust; hinna muutumise tõttu on muutunud vaid nõutav kogus. Nõudlus saab muutuda vaid siis kui üks nõudlusjoon asendub teisega. Näiteks, kui esialgne nõudlusjoon on asendunud nõudlusjoonega D2, millele vastavaks

nõudlusfunktsiooniks on $q = 30 - 4p$. Nüüd tähendab liikumine nõudlusjoonel D1 paiknevast punktist A nõudlusjoonel D2 paiknevasse punkti C koordinaatidega $p = 2$ ja $q = 22$ juba nõudluse muutust, sest nõudlusjoon D1 on asendunud nõudlusjoonega D2. Analoogiline arutelu kehtib ka pakutava koguse ja pakkumise kohta.



Joonis 4.2.5. Lineaarsed nõudlusjooned.

Näide 4.2.2. Leida joonisel 4.2.6 esitatud graafikul kujutatud nõudluse analüütiline avaldis.

Lahendus.

Lineaarfunktsiooni avaldise leidmiseks vajame algordinaati b ja tõusu a . Jooniselt $b = 9$.

Esimene võimalus. Meenutame, et kui on teada sirge kaks punkti $(q_1; p_1)$ ja $(q_2; p_2)$, siis selle sirge võrrand on esitatav kujul

$$\frac{q - q_1}{q_2 - q_1} = \frac{p - p_1}{p_2 - p_1},$$

kus (q, p) on sirge suvalise punkti koordinaadid. Asendades $(q_1; p_1) = (0; 9)$ ja $(q_2; p_2) = (4; 3)$ eeltoodud valemisse, saame avaldada nõudlusfunktsiooni analüütilise kuju:

$$\frac{q - 0}{4 - 0} = \frac{p - 9}{3 - 9} \Rightarrow \frac{p - 9}{-6} = \frac{q}{4} \Rightarrow 4p - 36 = -6q \Rightarrow p = -1,5q + 9.$$

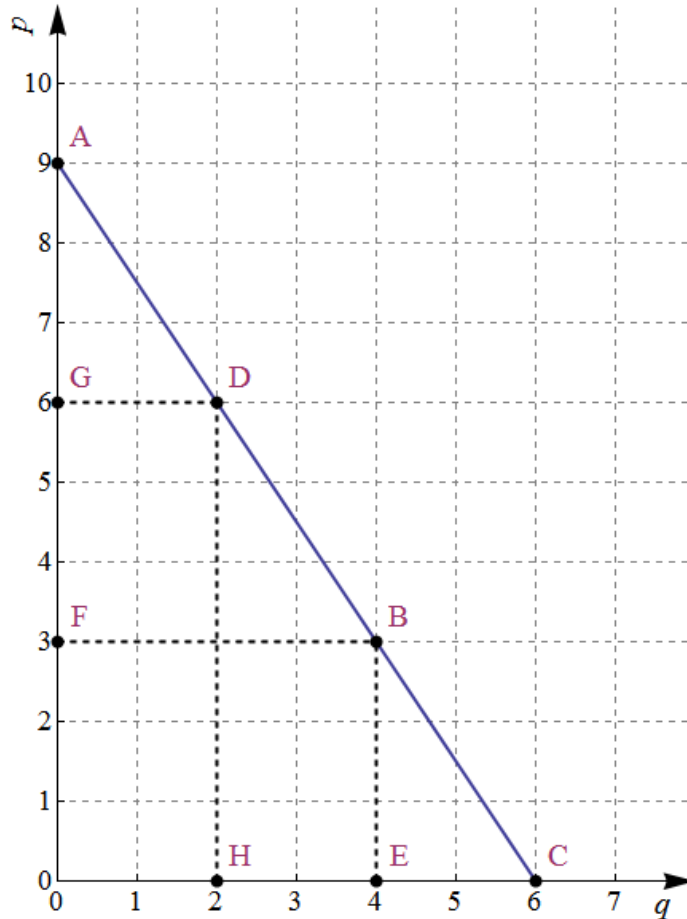
Teine võimalus. Sirge tõusu a leidmiseks kasutame seost

$$a = \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1} \tag{4.2.2}$$

kus $(q_1; p_1)$ ja $(q_2; p_2)$ on sirge kahe suvalise punkti koordinaadid. Valime nendeks punktideks lõikepunktid telgedega, st punktid A(0; 9), C(6; 0). Siis valemi (4.2.2) põhjal

$$a = \frac{0-9}{6-0} = -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2} = -1,5,$$

seega graafikul toodud nõudlusfunktsiooni esituseks saame jällegi funktsiooni $p = -1,5q + 9$. #



Joonis 4.2.6. Nõudluse graafiline esitus.

Näide 4.2.3. Poest osteti päevas keskmiselt 200 kg apelsine hinnaga 1,7 eurot kg ning 170 kg apelsine hinnaga 2 eurot kg. Leida nõudlusfunktsioon eeldusel, et see on lineaarne.

Lahendus.

Et otsitav funktsioon on lineaarne, siis otsime seda kujul $q = b + a \cdot p$. Ülesande tingimusi kasutades võime välja kirjutada võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 200 = b + 1,7a \\ 170 = b + 2a \end{cases},$$

mille lahendamisel saame $a = -100$ ja $b = 370$. Järelikult $q = 370 - 100p$. #

Näide 4.2.4. Leida toote lineaarne nõudlusfunktsioon, kui 4000 müügieleva toote ühikuhind on 30 eurot ja 6000 toote müügile laskmise korral kujuneb ühikuhinnaks 24 eurot. Leida piirhind, suurim võimalik nõutav kogus ning 10 000 toote müügile laskmisel kujunev hind.

Lahendus.

Võttes $(q_1; p_1) = (4000; 30)$ ja $(q_2; p_2) = (6000; 24)$, saame valemi (4.2.2) põhjal

$$a = \frac{24 - 30}{6000 - 4000} = -\frac{6}{2000} = -0,003.$$

Kuna $b = p - a \cdot q$, siis võttes $(q; p) = (4000; 30)$, saame $b = 30 - (-0,003) \cdot 4000 = 42$. Seega nõudlusfunktsioon on $p = -0,003q + 42$.

Võttes $q = 0$, arvutame piirhinnaks $p = -0,003 \cdot 0 + 42 = 42$ eurot.

Suurima võimaliku nõutava koguse q_{\max} avaldame võrrandist $0 = -0,003q + 42$:

$$q_{\max} = \frac{42}{0,003} = 14000.$$

Müügile paisatud 10 000 toote korral kujuneb ühe eseme müügihinnaks

$$p = -0,003 \cdot 10\,000 + 42 = 12 \text{ eurot.}$$

Vastus: nõudlusfunktsioon on $p = -0,003q + 42$, piirhind $p = -0,003 \cdot 0 + 42 = 42$ eurot, $q_{\max} = 14000$ ja $p(10\,000) = 12$ eurot. #

Näide 4.2.5. Leida lineaarne pakkumisfunktsioon, kui tooteid hinnaga 500 eurot /tk paisatakse turule 10 000 tükki ning ühikuhinna langus 200 euro võrra toob kaasa pakutava koguse languse 2000 tooteni. Skitseerida graafik. Millisest hinnatasemest alates tekib minimaalne pakkumusmotivatsioon? Missugune ühikuhind tagab 10 000 toote, ühe miljoni toote pakkumise?

Lahendus.

Pakkumisfunktsiooni $p = b + a \cdot q$ tõusu a arvutamiseks kasutame valemit (4.2.2), võttes selles $(q_1; p_1) = (10\,000; 500)$ ja $(q_2; p_2) = (2000; 300)$:

$$a = \frac{300 - 500}{2000 - 10\,000} = 0,025.$$

Kuna $b = p - a \cdot q$, siis võttes $(q; p) = (10\,000; 500)$, saame $b = 500 - 0,025 \cdot 10\,000 = 250$.

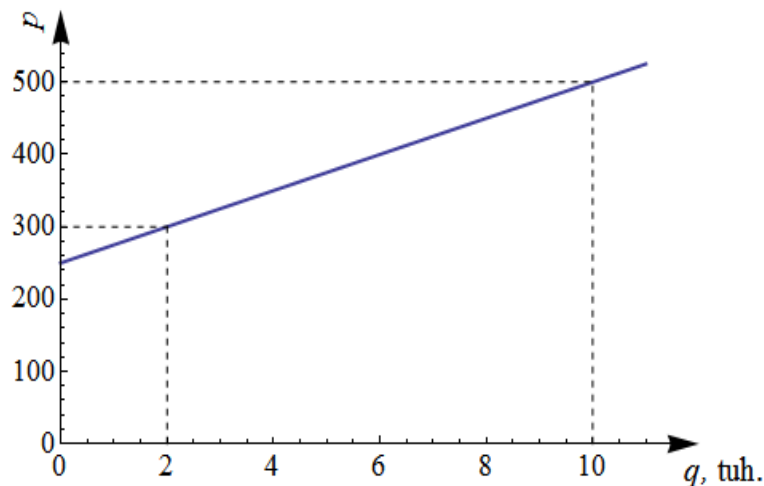
Vastus: Pakkumisfunktsiooniks on $p = 0,025q + 250$ (vt ka graafikut jooniselt 4.2.7), millest näeme, et tootjal tekib motivatsioon üldse midagi pakkuda, kui hind p on suurem kui 250 €. 10

tuhande toote pakkumise tagab hind $p = 0,025 \cdot 10\,000 + 250 = 500$ eurot, ühe miljoni toote pakkumise tagab hind $p = 0,025 \cdot 1\,000\,000 + 250 = 25\,250$ eurot. #

Lihtsuse mõttes vaatleme ühe kaubaartikli turgu, kus tegutsevad vaid tarbijad (mõudjad) ja tootjad (pakkujad).

Hinda p^* , mille puhul nõutav kogus võrdub pakutava kogusega, nimetatakse **tasakaaluhinnaks** (*equilibrium price*). Vastavat kauba kogust $q^* = f(p^*) = g(p^*)$ nimetatakse **tasakaalukoguseks** (*equilibrium quantity*). Olukorda turul, kus nõutav kogus võrdub pakutava kogusega, nimetatakse **turutasakaaluks** (*market equilibrium*).

Kui turutingimused (st turul kehtivad nõudlus ja pakkumine ehk nõudlus- ja pakkumiskõverad) ei muutu, siis jääb tasakaaluhind turul püsima.

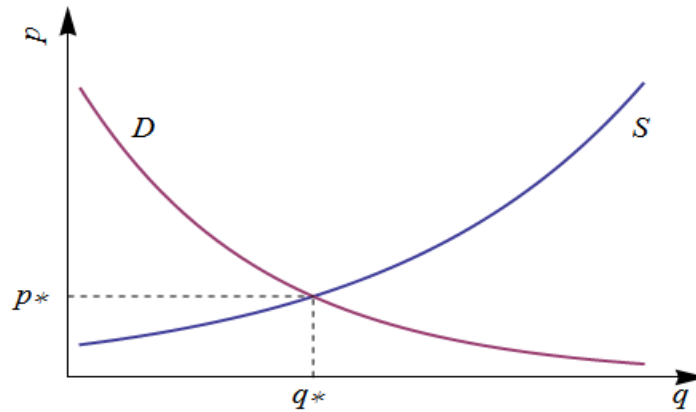


Joonis 4.2.7. Pakkumisfunktsioon $p = 0,025q + 250$. Kogus q on tuhandetes.

Müügimaht (*sales capacity / sales volume*) q on kindla perioodi vältel ostetud kauba kogus. Müügimaht $q = q(p)$ langeb kokku pakutava kauba kogusega $q_s(p)$, kui turul on defitsiit (nõudlus ületab pakkumise) ning nõutava kauba kogusega $q_D(p)$, kui turul on ülejääk, ehk kui pakkumine ületab nõudluse, st

$$q(p) = \begin{cases} q_s(p), & 0 < p \leq p^* \\ q_D(p), & p^* \leq p < \infty. \end{cases}$$

Seega tasakaaluhinnast p^* väiksemate hindade korral väljendab joonisel 4.2.8 müügimahtu pakkumiskõver, tasakaaluhinnast p^* suuremate hindade korral aga nõudluskõver.



Joonis 4.2.8. Tasakaalukogus q^* ja tasakaaluhind p^* ; D – nõudluskõver, S – pakkumiskõver.

Vaatleme näidet turutasakaalu kohta käibemaksu rakendamisel. Tuletame meelde, et käibemaks kehtestatakse protsentides müügihinnast.

Näide 4.2.6. Mandariinide turul kehtivad järgmised nõudluse ja pakkumise funktsioonid:

$$q_D = 10 - 2p \text{ ja } q_S = 3p - 1$$

(p on 1 tonni hind tuhandetes eurodes ning q_D ja q_S kogus tonnides). Kui suur on kogutav käibemaksu summa KM mandariinide müügist, kui käibemaksu määr on 20%? Kui suur oleks läbimüük käibemaksu puudumisel?

Lahendus.

Peale käibemaksu kehtestamist pakkumishind (ehk raha, mille saab ühe ühiku müügist pakkuja peale käibemaksu maha arvamist) p_S moodustab nõudlushinnast p_D 80%, st

$$p_S = 0,8 \cdot p_D \quad (4.2.3)$$

Avaldades nõudlus- ja pakkumishinna vastavalt nõudlus- ja pakkumise funktsioonist, saame

$$p_D = \frac{10 - q_D}{2}, \quad p_S = \frac{1 + q_S}{3}.$$

Kuna turutasakaalu korral nõutav ja pakutav kogus on omavahel võrdsed, st $q_D = q_S = q$, siis võrduse (4.2.3) põhjal võime kirjutada

$$\frac{1 + q}{3} = 0,8 \cdot \frac{10 - q}{2} \Rightarrow 1 + q = 1,2 \cdot (10 - q) \Rightarrow 1 + q = 1,2 \cdot (10 - q) \Rightarrow 2,2q = 11 \Rightarrow q = 5 \quad (4.2.4)$$

Järelikult üks tonn mandariine realiseeritakse turul hinnaga

$$p_D = \frac{10 - 5}{2} = 2,5 \text{ tuhat eurot.} \quad (4.2.5)$$

Kogutav 20%-line käibemaks on

$$KM = 0,2 \cdot 5 \cdot 2,5 = 2,5 \text{ tuhat eurot.} \quad (4.2.6)$$

Käibemaksu puudumisel peab tasakaaluhind p^* rahuldama võrrandit

$$10 - 2p = 3p - 1,$$

millest leiame, et

$$p^* \approx 2,2 \text{ (tuhat eurot) ja müüdü kogus } q^* = 10 - 2 \cdot 2,2 = 5,6 \text{ (tonni). \#}$$

Uurime, kuidas käibemaksu määra suurendamine muudab nõutavat kogust, nõudlushinda ning laekuva käibemaksu kogusuurust. Selleks modifitseerime eelnevat näidet 4.2.6.

Näide 4.2.7. Uurime veel kord näidet 4.2.6, kus 20% käibemaksumäära asemel on käibemaksumääraks k ($0 \leq k < 1$). Kuidas muutuvad nõutav kogus, nõudlushind ning laekuva käibemaksu kogusuurus, kui käibemaksumäära k suurendada?

Lahendus. Antud juhul saame seoste (4.2.3)- (4.2.6) asemel vastavalt järgmised seosed:

$$\begin{aligned} \frac{1+q}{3} &= (1-k) \cdot \frac{10-q}{2} \\ \Rightarrow 2+2q &= 30-3q-30k+3k \cdot q \\ \Rightarrow (5-3k) \cdot q &= 2 \cdot (14-15k) \\ \Rightarrow q &= 2 \cdot \frac{(14-15k)}{5-3k}, \\ \Rightarrow p_D &= \frac{10-2 \cdot \frac{(14-15k)}{5-3k}}{2} = \frac{11}{5-3k}, \\ KM &= k \cdot 2 \cdot \frac{(14-15k)}{5-3k} \cdot \frac{11}{5-3k} = 22 \cdot \frac{(14-15k) \cdot k}{(5-3k)^2}. \end{aligned}$$

Arvutame q , p_D ja KM tuletised k järgi:

$$q' = -\frac{66}{(5-3k)^2}, \quad p_D' = \frac{33}{(5-3k)^2}, \quad KM' = 22 \cdot \frac{70-108k}{(5-3k)^3}.$$

Kuna $0 \leq k < 1$, siis $5-3k > 0$, mistõttu $q' < 0$ ja $p_D' > 0$. Järelikult käibemaksumäära k suurendamine toob endaga kaasa nõutava koguse (ehk läbimüügi) q vähenemise ning nõudlushinna p_D suurenemise. Edasi paneme tähele, et $KM' > 0$, kui $70-108k > 0$ ehk

$0 \leq k < \frac{35}{64} \approx 0,6481$ ning $KM < 0$, kui $0,6481 < k < 1$. Järelikult kui me suurendame

käibemaksu kuni 64,81 protsendini, suureneb laekuv käibemaksusumma, kuid edasine käibemaksu suurendamine põhjustab käibemaksu laekumise kahanemise. #



ÜLESANDED

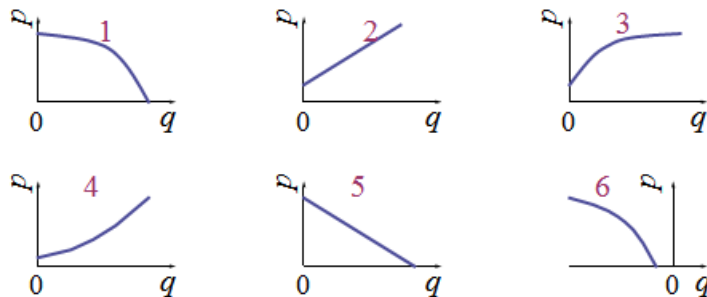
4.2.1. Kauba nõudlusfunktsioon avaldub kujul $q = 600 - 3p$, kus p on selle kauba ühe ühiku hind eurodes ja q tähistab nõutavat kaubakogust. Milliste p väärtuste puhul nõudlus eksisteerib?

4.2.2. On antud funktsioon $q = 625 - p^2$. Kas see funktsioon võib olla nõudlusfunktsiooniks? Kui võib, siis leida, milliste p väärtuste puhul nõudlus eksisteerib?

4.2.3. Mingi kauba pakkumisfunktsioon on $q = 8 + \sqrt{p-4}$. Milliste p väärtuste puhul pakkumine eksisteerib?

4.2.4. On antud funktsioon $q = p^3 - 8$. Kas see funktsioon võib olla pakkumisfunktsiooniks? Kui võib, siis leida, milliste p väärtuste puhul pakkumine eksisteerib?

4.2.5. Leia, millised joonisel 4.2.9 toodud graafikutest võivad kirjeldada nõudlusfunktsiooni, millised pakkumisfunktsiooni.



Joonis 4.2.9. Ülesande 4.2.5. joonis.

4.2.6. Leida, milline järgnevatest funktsioonidest võib olla nõudlusfunktsioon, milline pakkumisfunktsioon:

- $p(q) = 600 - 4q$;
- $p(q) = 400 + 2q$;
- $p(q) = -600 - 2,5q$.

4.2.7.* Kauba nõudlusfunktsioon on $q = 3300 - 50p$ ja pakkumisfunktsioon on $q = 500p$.

- Kui suur on maksimaalne nõutav kogus?
- Kui suur on piirhind, mille puhul nõutav kogus on 0?

c) Kui suur on tasakaaluhind ja tasakaalukogus?

d) Milline olukord valitseb turul, kui hind on i) 2 eurot ja ii) 10 eurot?

4.2.8.* Nõudluskõvera funktsiooni tuletamiseks vajalike andmete saamise reaalseks teeks on testi korraldamine, so piiratud kaubapartiide müümine erinevate hindadega koos müüdüd kauba koguste fikseerimisega. Lineaarse nõudlusfunktsiooni tuletamiseks vajame müügiandmeid vähemalt kahe erineva hinna korral. Leida lineaarne nõudlusfunktsioon, teades, et hinnaga 30 eurot oli kauba nõutav kogus nädalas 10 tk, hinnaga 25 eurot aga 12 tükki.

4.2.9.* Meesautojuhtide nõudlusfunktsioon avaldub kujul $q_M = 2800 - 2,5p$ ja naisautojuhtide nõudlusfunktsioon kujul $q_N = 2700 - 2,5p$, kus q_M tähistab nõutavat meesautojuhtide arvu ja q_N nõutavat naisautojuhtide arv aastast ja p on autojuhtide kuupalk (eurodes). Mitu mees- ja naisautojuhti tuleb tööle võtta, kui aastast vajatakse 600 autojuhti? Leida ka autojuhi kuupalk.

4.2.10.* Kui 0,5 kg kohvipaki hind on 4,75 eurot, siis on nõutav kogus 10 000 pakki kuus. Kui tõsta hind 5 euroni pakk, siis nõutav kogus langeb 9000 pakini. Leida lineaarne nõudlusfunktsioon ja skitseerida graafik. Missuguse hinna korral võrdub nõutav kogus 0-ga? Milline hind viiks nõutava koguse 20 000 pakini kuus?

4.2.11.* Firma toote nõudlusfunktsioon on esitatav kujul $q = 380 - 0,2p^2$. Leida lineaarne pakkumisfunktsioon, teades, et tasakaaluhind on 30 ja hinna 15 puhul on pakutav kogus 110 ühikut.

4.2.12.** Turul kehtivad tootele järgmised nõudluse ja pakkumise funktsioonid:

$$q_D = 12 - 3p \text{ ja } q_S = 4p - 2,$$

kusjuures hind on tuhandetes eurodes ja kogus tuhandetes tonnides. Kui suur on kogutav käibemaksu summa antud toote müügist, kui käibemaksu määr on 20%? Kui palju kaotaks riik käibemaksutulu, kui käibemaksu määra langetada 15 protsendini? Kui suur oleks läbimüük käibemaksu puudumisel?

4.2.13. Aktsiis** (*excise duty*) on maks, mille riik kehtestab teatud kaubaga kauplemisele või tootmisele. Levinumad aktsiisid on alkoholi-, tubaka- ja kütuseaktsiis. Turu nõudlusfunktsioon on $q_D = 25 - 2p$ ja pakkumisfunktsioon $q_S = -5 + 3p$. Leida tasakaaluhind ja tasakaalukogus. Millise hinnaga hakatakse realiseerima toodangut turul, kui iga müüdüd toodanguühiku pealt peab tootja maksma ühe rahaühiku käibemaksu. Mitu protsenti käibemaksust lisandus esialgsele toote realiseerimishinnale?

4.2.14.** Turul kehtivad teatavale tootele järgmised nõudluse ja pakkumise funktsioonid:

$$q_D = 12 - 3p \text{ ja } q_S = 4p - 2$$

kusjuures hind on tuhandetes eurodes ja kogus tuhandetes tonnides. Kehtestatud käibemaksumäär on k ($0 \leq k < 1$). Kuidas muutuvad nõutav kogus, nõudlushind ning laekuva käibemaksu kogusuurus, kui käibemaksumäära k suurendada?



Test asub e-õppekeskkonnas *Moodle*.



KIRJANDUST LUGEMISEKS

Aasma, A., Kallam, H., Levin, A. Majandusmatemaatika alused. Tallinn, Kirjastus „Ilo“, 2005. Lk 115-120.

Arrak, A., Eamets, R., Krinal, V. jt. Majanduse algkursus. Tallinn, 1995. Lk 59-77.

Eamets, R., Kaasa, A., Kaldaru, H., Trasberg, V. Sissejuhatus majandusteooriasse. Tartu, Tartu Ülikooli Kirjastus, 2005. Lk 29-34, 57-61.

Ettevõtlikkusest ettevõtluseni: gümnaasiumiõpik. Toimetajad T. Saal jt. Tallinn, SA Teadlik Valik, 2012. Lk 45-50, 117-118.

Majanduse ABC / Arrak, A., jt. III trükk. Tartu, Avatar OÜ, 2002. Lk 81-93.

Majandusõpik gümnaasiumile. Koostajad ja autorid L. Kulu jt. Tallinn, Junior Achievement Eesti AS, 2011. Lk 32-53, 136-143.

Kerem, K., Keres, K., Randveer, M. Mikroökonomika alused. Tallinn, Külim, 2004. Lk 29-59.

Kerem, K., Randveer, M. Mikro- ja makroökonomika põhikursus. 5., parandatud ja täiendatud trükk, Tallinn, Külim, 2007. Lk 15-25.

Kaasa, A. Majandusteaduse matemaatilised alused. Tartu, Tartu Ülikooli Kirjastus, 2002. Lk 9-24.

4.3. Kulu- tulu- ja kasumifunktsioon, tasuvuspunkt ning eelarvekitsendus

4.3.1. Kogukulu ja keskmine kulu

Kulufunktsioon on funktsionaalne seos tootmismahu (toodangu koguse) q (*quantity*) ja kulude C (*cost*) vahel. Oletame, et ettevõtte toodab vaid ühte kaubaartiklit.

Kulu, mis ei sõltu otseselt kauba tootmismahust (hoone(te) üür, kindlustus, administratsiooni ülalpidamiskulud jne) nimetatakse **püsikuluks** ehk **fikseeritud kuluks** (*fixed cost*) ja tähistatakse FC . Fikseeritud kulud antakse kindla ajavahemiku (aasta, kuu) kohta.

Kulu, mille suurus sõltub tootmismahust q , nimetatakse **muutuvkuluks** (*variable cost*) ning tähistatakse VC . Näiteks kulud materjalile, töötasu.

Tootmise **kogukulu** (*total cost*) C (või TC) on püsikulu ja muutuvkulu summa ehk

$$C = FC + VC.$$

Lineaarne kulufunktsioon = püsikulud + muutuvkulud

$$C(q) = C_0 + a \cdot q \quad (4.3.1)$$

kus q on tootmiskaht,
 C_0 on püsikulud,
 a on muutuvkulu tooteühiku kohta.

Näide 4.3.1. Olgu ajalehe väljaandmise kulud päevas 300 eurot ning ühe ajalehe trükkimiseks tehtavad muutuvkulud 0,5 eurot. Leida

- kulufunktsioon $C(q)$, mis kirjeldaks päevas tehtavate kulutuste sõltuvust ajalehtede arvust (tootmismahust) q ;
- summaarsed kulud 100 ajalehe trükkimisel päevas;
- summaarsed kulud 3000 ajalehe trükkimisel päevas.

Lahendus.

- Kuna antud juhul $C_0 = 300$ ja $a = 0,5$, siis vastavalt valemile (4.3.1) saame

$$C(q) = 300 + 0,5q.$$

- 100 ajalehe trükkimise kulud päevas on $C(100) = 300 + 0,5 \cdot 100 = 350$ eurot
- 3000 ajalehe trükkimise kulud päevas on $C(3000) = 300 + 0,5 \cdot 3000 = 1800$ eurot. #

Kulufunktsiooni teadmine võimaldab leida kogukulusid suvalise tootmismahu korral. Sobiv on selleks kasutada tabelarvutust: teades funktsiooni kuju, võime me selle funktsiooni tabuleerida: leida funktsiooni väärtuse erinevate argumentide väärtuste korral (vt joonis 4.3.1). Tabelarvutust kasutades võime muuta ka algandmeid, "läbi mängides" erinevaid võimalusi, uurida "mis juhtub, kui ...". Näiteks võime leida, kuidas muutuvad kogukulud, kui õnnestub vähendada fikseeritud kulusid 250 euronni päevas või kui muutuvkulud ühiku kohta suurenevad 0,7 euronni (vt joonis 4.3.2).

	A	B	C	D	E
1	Fikseeritud kulud	300			
2	Muutuvkulu ühiku kohta	0,5			
3					
4	Tootmismah	Kogukulud			
5	100	350			
6	500	550			
7	1000	800			
8	3000	1800			
9					

$=\$B\$1+\$B\$2*A5$

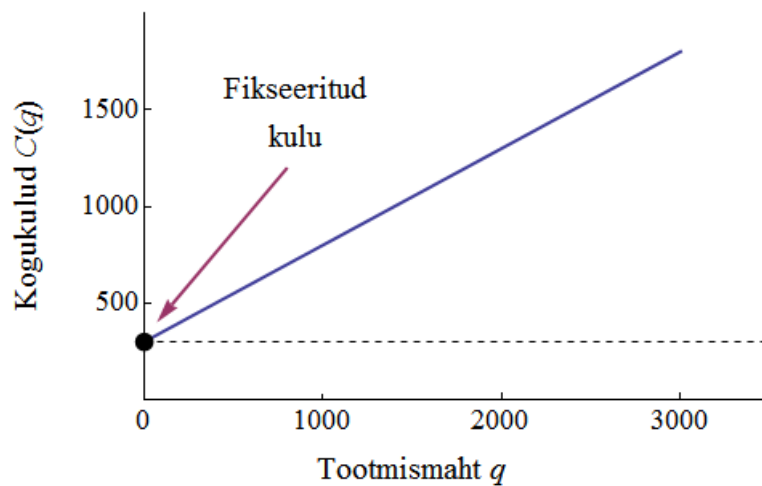
Joonis 4.3.1. Näite 4.3.1 lahendus tabelarvutuse abil.

	A	B
1	Fikseeritud kulud	300
2	Muutuvkulu ühiku kohta	0,7
3		
4	Tootmismah	Kogukulud
5	100	370
6	500	650
7	1000	1000
8	3000	2400
9		

	A	B
1	Fikseeritud kulud	250
2	Muutuvkulu ühiku kohta	0,5
3		
4	Tootmismah	Kogukulud
5	100	300
6	500	500
7	1000	750
8	3000	1750
9		

Joonis 4.3.2. Näite 4.3.1 lahendus tabelarvutuse abil muudetud lähteandmetega.

Peale kulufunktsiooni tabuleerimist võime kulude muutumise iseloomustamiseks kasutada graafikut (vt. joonis 4.3.3).



Joonis 4.3.3. Kulufunktsioon $C(q) = 300+0,5q$.

Keskmiseks kogukuluks (*average total cost*) nimetatakse kogukulu ja tootmismahu suhet AC , st

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q}$$

Keskmiseks muutuvkuluks (*average variable cost*) nimetatakse muutuvkulu ja tootmismahu suhet AVC , st

$$AVC(q) = \frac{VC(q)}{q}.$$

Keskmiseks püsikuluks (*average fixed cost*) nimetatakse püsikulu ja tootmismahu suhet AFC :

$$AFC(q) = \frac{FC(q)}{q}.$$

Keskmine kogukulu näitab kogukulu tooteühiku kohta, keskmine muutuvkulu näitab muutuvkulu tooteühiku kohta ja keskmine püsikulu näitab püsikulu tooteühiku kohta, kui tootmismah on q .

Näide 4.3.2. Näite 4.3.1 andmetel leida

- keskmise kogukulu, keskmise muutuvkulu ja keskmise püsikulu funktsioonid;
- keskmine kogukulu, keskmine muutuvkulu ja keskmine püsikulu 100 ajalehe trükkimisel päevas;
- keskmine kogukulu, keskmine muutuvkulu ja keskmine püsikulu 3000 ajalehe trükkimisel päevas.

Lahendus.

- Kuna $C(q) = 300 + 0,5q$ (vt näide 4.2.1), siis

$$AC(q) = \frac{300 + 0,5q}{q} = \frac{300}{q} + 0,5,$$

$$AVC(q) = \frac{0,5q}{q} = 0,5,$$

$$AFC(q) = \frac{300}{q},$$

seega keskmise kogukulu, keskmise muutuvkulu ja keskmise püsikulu funktsioonid on vastavalt

$$AC(q) = \frac{300}{q} + 0,5, \quad AVC(q) = 0,5, \quad AFC(q) = \frac{300}{q}.$$

- Keskmine kogukulu, keskmine muutuvkulu ja keskmine püsikulu 100 ajalehe trükkimisel päevas on vastavalt

$$AC(100) = \frac{300}{100} + 0,5 = 3,5 \text{ eurot, } AVC(100) = 0,5 \text{ eurot ja } AFC(100) = \frac{300}{100} = 3 \text{ eurot.}$$

c) Keskmine kogukulu, keskmine muutuvkulu ja keskmine püsikulu 3000 ajalehe trükkimisel päevas on vastavalt

$$AC(3000) = \frac{300}{3000} + 0,5 = 0,6 \text{ eurot, } AVC(3000) = 0,5 \text{ eurot ja}$$

$$AFC(3000) = \frac{300}{3000} = 0,1 \text{ eurot. \#}$$

Näitest 4.3.2 märkame, et trükitavate ajalehtede arvu suurendamine toob endaga kaasa ühe ajalehe trükkimiseks vajaliku kogukulu ja püsikulu ehk keskmise kogukulu ja keskmise püsikulu märgatava vähenemise: 100 ajalehe trükkimisel on kogukulu ühe ajalehe kohta 3,5 eurot, millest püsikulu on 3 eurot; 3000 ajalehe trükkimise korral aga on vastavad kulud ainult 0,6 eurot ja 0,1 eurot. See seaduspärasus kehtib majanduses küllalt üldiselt.

Tootmismahu suurendamine toob endaga sageli kaasa keskmise kogukulu ja keskmise püsikulu (ehk tooteühiku tootmise kohta tulevate kulude) vähenemise kuni teatud tootmismahuni.

Esitatud väide pole küll absoluutne. Kui tootmismahu suurendamine nõuab täiendavaid püsikulusid või tootmistehnoloogiast tulenevat keskmise muutuvkulu kasvu, siis keskmised kulud võivad tootmismahu suurenemisel hoopis suurenedada. Näites 4.3.2 kirjeldatud olukorras võib juhtuda, et olemasolev trükimasin võimaldab trükkida vaid kuni 5000 ajalehte päevas. Siis nõuab trükitavate ajalehtede arvu suurendamine üle 5000 olemasoleva trükipressi uuendamist või selle asemele kaasaegsema masina hankimist, milleks tuleb teha täiendavaid püsikulusid. Seetõttu suurenevad loomulikult nii keskmine püsikulu kui ka keskmine kogukulu.

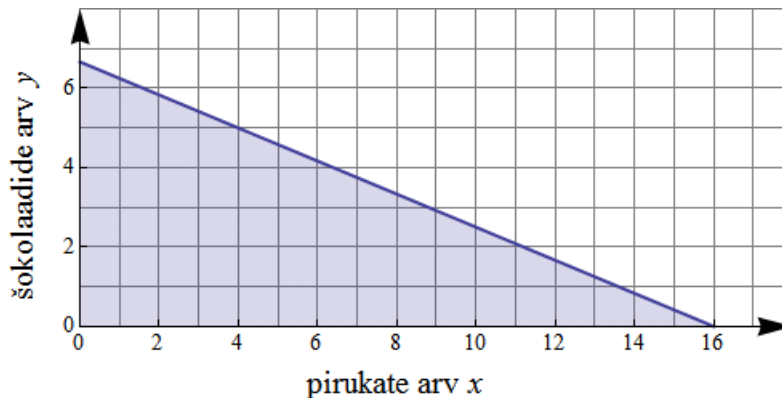
4.3.2. Eelarvekitsendus

Olgu x ja y vastavalt kasutatavate hüviste A ja B kogused, p_A ja p_B nende hinnad ja I nendele hüvistele kulutatav summaarne rahasumma. Siis võrrandit

$$p_A \cdot x + p_B \cdot y = I$$

nimetatakse **eelarvekitsenduseks** (*budget constraint*). Teisiti öeldes, eelarvekitsenduseks nimetatakse seost, mis näitab kõiki hüviste kogumeid, mis on tarbijale kättesaadavad antud hindade taseme ja sissetuleku korral. Näiteks, kui Jürgen võib pirukatele ja šokolaadile kulutada kokku 8 eurot ning üks pirukas maksab 0,5 eurot ja üks šokolaad 1,2 eurot, siis Jürgeni eelarvekitsendus on $0,5x + 1,2y = 8$, kus x tähistab pirukate ja y šokolaaditahvlite arvu. Joonisel 4.3.4

on kujutatud eelarvekitsendusele vastav sirge $y = \frac{8}{1,2} - \frac{0,5}{1,2}x$, varjutatud osa sisaldab lubatud



Joonis 4.3.4 Jürgeni eelarvekitsendusele vastab sirge $0,5x + 1,2y = 8$. Varjutatud ala on lubatud koguste piirkond.

koguste paare. Jürgen saab osta näiteks 4 pirukat ja 5 šokolaaditahvli, kulutades kogu raha, sest punkt koordinaatidega $x=4$, $y=5$ asub täpselt sirgel. Kui ta ostab aga 8 pirukat ja 3 šokolaadi, jääb üle 0,4 eurot.

Näide 4.3.3. Kahe kauba peale, mille hinnad on vastavalt 5 eurot ja 12 eurot, on võimalik kulutada 480 eurot. Leida eelarvekitsendus

- antud hindade ja eelarve korral;
- juhul, kui eelarve on 20% väiksem;
- juhul, kui esimese kauba hind tõuseb kolme euro võrra;
- juhul, kui teise kauba hind langeb kaks korda.

Lahendus.

Olgu esimese kauba kogus x ja teise kogus y .

- Ülesande tingimuste kohaselt eelarvekitsendus on $5x + 12y = 480$.
- Kuna peale eelarve 20% kärbet on see $480 - 0,2 \cdot 480 = 384$ eurot, siis vastavaks eelarvekitsenduseks on $5x + 12y = 384$.
- Peale esimese kauba hinna tõusu kolme euro võrra on eelarvekitsendus $8x + 12y = 480$.
- Peale teise kauba hinna kahekordset langust on eelarve kitsendus $5x + 6y = 480$. #

Vt ka interaktiivset demot „Eelarvekitsendus“.



4.3.3. Kogutulu ja keskmine tulu

Müües teenust või toodet, saab firma tulu (*revenue*). **Kogutulu** (*total revenue*) R ehk TR on müüdüd kaubakoguse ja kaubaühiku hinna korrutis. **Tulufunktsioon** (*revenue function*) on funktsionaalne seos müüdüd tooteühikute (või tegevusmahu) ja **tulu** (*revenue*) R vahel.

Tulufunktsioon = nõutav kogus \times hind

$$R(q) = p \cdot q$$

kus q on nõutav kogus (tootmismah),

p on tooteühiku hind.

Et tulufunktsioon oleks reaalselt interpreteeritav, peavad kehtima tingimused $q > 0$; $p > 0$ (kogus ja hind on positiivsed).

Keskmine kogutulu (*average total revenue*) AR on kogutulu ja tootmismahu suhe, st

$$AR(q) = \frac{R(q)}{q} \quad \text{ehk} \quad AR(q) = \frac{TR}{q}.$$

Keskmine kogutulu näitab tulu tooteühiku kohta, kui tootmismah on q

Lihtsaimal juhul on seos võrdeline ja võrdeteguriks on hind (*price*) p , mis on konstantne, st ei sõltu tootmismahust q . Majanduses kehtib selline olukord **täieliku konkurents** (*perfect competition*) tingimustes tegutseval turul. Täieliku konkurents tingimustes on tootmisharus palju väikeseid firmasid, mis toodavad ühesugust toodangut ning millest ükski ei mõjuta turul väljakujunenud hindu. Seega on nii **täieliku konkurents tingimustes tegutsev ettevõtte** (ehk *TKF* täielikult konkureeriv firma) kui ka selle toodangu tarbija hinnavõtjad (st nad peavad arvestama turul kujunenud hindadega). Täieliku konkurents puhul ei ole nii majandusharru sisenemiseks kui ka sealt väljumiseks seatud mingeid barjääre. Tootjail ja tarbijail on kättesaadav kogu vajalik majandusinfo. Üldiselt peab mainima, et täieliku konkurents turg ei ole realistlik, kuid mitmed turud on sellele ligilähedased.

Mittetäieliku konkurents (*imperfect competition*) (osa ettevõteteid omab turul eelisseisundit) tingimustes sõltub aga hind tootmismahust, st sel juhul võime hinda p vaadelda tootmismahu q funktsioonina $p = p(q)$. Selline olukord tekib näiteks siis, kui mingi firma on **monopoolses** (*monopoly*) seisundis (turul tegutseb vaid üks firma ja teiste firmade juurdetulek on takistatud), mistõttu saab see firma ka tootmismahu kaudu hinda mõjutada.

Näide 4.3.4. Juku müüb koolis mudelautosid hinnaga 3 eurot tükk. Leida

- a) tulufunktsioon, mis kirjeldab müügist saadud tulu sõltuvust müüitud autode arvust q ;
 b) keskmine tulu.

Lahendus.

- a) Kuna mudelautosid on võimalik hankida väga paljudest kohtadest (näiteks kõigist mänuasjade kauplustest), siis võime siin lugeda, et olukord on sarnane täieliku konkurentsi turuga, mistõttu otsitavaks funktsiooniks on $R(q) = 3q$.

b) Keskmine tulu $AR(q) = \frac{R(q)}{q} = \frac{3q}{q} = 3$ eurot. #

Näitest 4.3.4 paneme tähele, et keskmine tulu on võrdne mudelauto hinnaga p . Selline omadus kehtib alati.

Keskmine tulu võrdub toote hinnaga,

$$AR(q) = p.$$

Näide 4.3.5. Arvuteid tootev firma „Kompuuter“ omab arvutite turul monopoolset seisundit. Katseliselt on kindlaks tehtud, et selle firma toodetud arvutite nõudlus on avaldatav kujul $q = 2400 - 2p$, kus p on ühe arvuti müügihind eurodes ja q on nõutav arvutite kogus. Leida

- a) selle firma tulufunktsioon;
 b) 1000 arvuti tootmisest saadav tulu.

Lahendus.

- a) Avaldame nõudlusfunktsioonist p :

$$p = 1200 - 0,5q.$$

Järelikult otsitav tulufunktsioon on

$$R(q) = (1200 - 0,5q) \cdot q \text{ ehk } R(q) = 1200q - 0,5q^2.$$

- b) 1000 arvuti tootmisest saadav tulu $R(1000) = (1200 - 0,5 \cdot 1000) \cdot 1000 = 700\,000$ eurot. #

4.3.4. Kasum, tasuvuspunkt

Firma tegevuse põhieesmärgiks on **kasumi** (*profit*) maksimeerimine. Kasum π on võrdne kogutulude ja kogukulude vahega.

Kasumifunktsioon = tulufunktsioon – kulufunktsioon

$$\pi(q) = R(q) - C(q),$$

kus q on tegevuse maht,

$\pi(q)$ on kasumifunktsioon,

$R(q)$ on tulufunktsioon,

$C(q)$ on kulufunktsioon.

Termini kasum asemel kasutatakse mõnikord ka terminit **puhastulu**.

Näide 4.3.6. Olgu meil firma kulufunktsioon $C(q) = 40q + 1500$ ja tulufunktsioon $R(q) = 55q$

Leida

- kasumifunktsioon;
- 300 tooteühiku müügist laekuv kasum;
- 50 tooteühiku müügist laekuv kasum.

Lahendus.

- a) Kasumifunktsioon on tulu- ja kulufunktsiooni vahe:

$$\pi(q) = R(q) - C(q) = 55q - (40q + 1500) = 15q - 1500,$$

st kasumifunktsiooniks on $\pi(q) = 15q - 1500$.

- 300 tooteühiku müügist laekuv kasum $\pi(300) = 15 \cdot 300 - 1500 = 3000$ rahaühikut.
- 50 tooteühiku müügist laekuv kasum $\pi(50) = 15 \cdot 50 - 1500 = -750$ rahaühikut, st antud juhul on tegemist kahjumiga. #

Müügimahtu q , mille puhul kogukulu ja kogutulu on võrdsed, st kasum $\pi(q) = 0$, nimetatakse **kasumiläveks** ehk **tasuvuspunktiks** (*breakeven point*).

Näide 4.3.7. Leida näite 4.3.6 andmetel kasumilävi. Milliste q väärtuste korral saab firma kasumit, milliste korral kahjumit?

Lahendus.

Kasumiläve leidmiseks tuleb lahendada võrrand $\pi(q) = 0$. Kuna $\pi(q) = 15q - 1500$ (vt näide 4.3.6), siis lahendame võrrandi

$$15q - 1500 = 0,$$

mis annab tasuvuspunktiks $q = 100$. Firma saab kasumit, kui $\pi(q) > 0$ ehk

$$15q - 1500 > 0 \Rightarrow q > 100,$$

ning kahjumit, kui $\pi(q) < 0$ ehk $q < 100$.

4.3.5. Kasumifunktsioon lineaarse nõudlus- ja kulufunktsiooni korral

Uurime kasumifunktsiooni juhul, kui nõudlus- ja kulufunktsioon on lineaarsed.

Näide 4.3.8. Firma kulude analüüs näitas, et ühe kuu tootmiskulud on kirjeldatavad funktsiooniga $C(q) = 5q + 200$, kus q on tootmismah. Nõudluse analüüs näitas, et nõudlusfunktsioon on lineaarne ja avaldub kujul $p = 500 - 1,25q$, kus p on hind.

- Leida firma tulu- ja kasumifunktsioonid.
- Joonestada leitud funktsioonide graafikud ja leida nende abil maksimaalset tulu ja maksimaalset kasumit kindlustavad q väärtused ning nendele väärtustele vastavad maksimaalse tulu ja maksimaalse kasumi väärtused.

Lahendus.

- Tulufunktsiooni saame hinnaavaldise asendamisega tulufunktsiooni valemisse:

$$R = p \cdot q = (500 - 1,25q) \cdot q = 500q - 1,25q^2.$$

Kasumifunktsiooni leidmiseks asendame kasumivalemis tulu- ja kulufunktsioonid nende avaldistega:

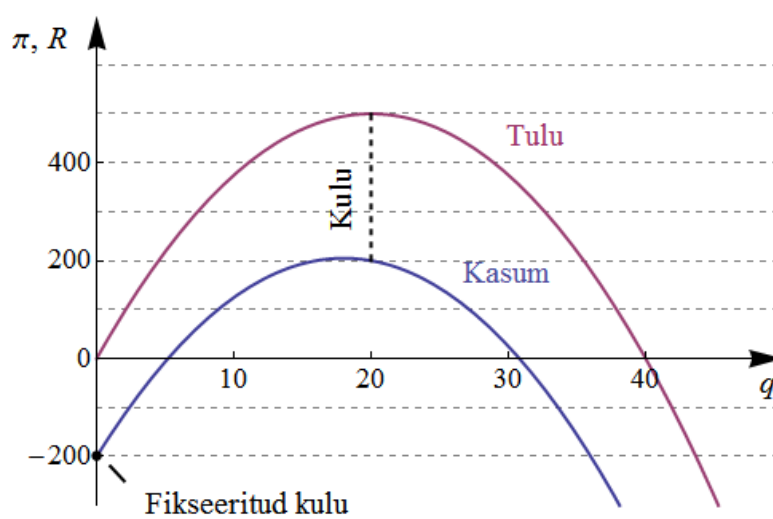
$$\pi(q) = R(q) - C(q) = 500q - 1,25q^2 - (5q + 200) = -1,25q^2 + 495q - 200.$$

Ettevõtte tulu- ja kasumifunktsioon on vastavalt

$$R(q) = 500q - 1,25q^2 \text{ ja } \pi(q) = -1,25q^2 + 495q - 200.$$

- Esitame leitud funktsioonide graafikud (vt joonis 4.3.5).

Graafikute analüüsimisel näeme, et tootmismahu 20 korral on tulu maksimaalne ja $R(20) = 500$ ning kasum on siis 200 ühikut. Kasum on maksimaalne tootmismahu 18 korral; vastav kasum π_{\max} on 205 ühikut. Neid väiteid saab kontrollida ka järgnevate valemitega (4.3.2) ja (4.3.3). #



Joonis 4.3.5. Tulufunktsioon $R(q) = 50q - 1,25q^2$ ja kasumifunktsioon $\pi(q) = -1,25q^2 + 45q - 200$.

Uurime tulu- ja kasumifunktsioone üldiste lineaarsete kulu- ja nõudlusfunktsioonide korral. Olgu kulufunktsioon

$$C(q) = C_0 + a \cdot q, \quad C_0 > 0, \quad a > 0,$$

kus q on tootmismah, a muutuvkulu ühiku kohta ja C_0 püsikulu. Lineaarse nõudlusfunktsiooni kirjutame kujul

$$p = p_0 + b \cdot q, \quad b < 0,$$

kus p on hind ja p_0 piirhind (hind, mille korral nõutav kogus on 0). Leiame tulu- ja kasumifunktsioonid üldkujul. Tulufunktsioon on

$$R = p \cdot q = (p_0 + b \cdot q) \cdot q = b \cdot q^2 + p_0 \cdot q.$$

Näeme, et lineaarse kulu- ja nõudlusfunktsiooni korral on tulufunktsiooniks ruutfunktsioon, mille

ruutliikme ees olev kordaja on negatiivne ($b < 0$),

lineaarliikme ees olev kordaja on positiivne ($p_0 > 0$),

vabaliige puudub (kui tootmismah q on null, ei saada ka tulu).

Sellise funktsiooni graafik on allapoole avanev parabool. Matemaatikast on teada, et kui parabooli võrrand on $y = ax^2 + bx + c$, siis haripunkti x koordinaadi saab leida valemist

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Seega tulugraafiku haripunkt asub kohal

$$q = -\frac{p_0}{2b}. \quad (4.3.2)$$

Kasumifunktsioon on

$$\pi(q) = R(q) - C(q) = b \cdot q^2 + p_0 \cdot q - (C_0 + a \cdot q) = b \cdot q^2 + (p_0 - a) \cdot q - C_0$$

ehk

$$\pi(q) = b \cdot q^2 + (p_0 - a) \cdot q - C_0.$$

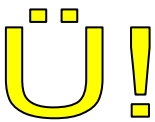
Näeme, et lineaarse kulu- ja nõudlusfunktsiooni korral on kasumifunktsioon ruutfunktsioon, mille

ruutliikme ees olev kordaja on negatiivne ($b < 0$),

vabaliige on negatiivne ($CF > 0$).

Graafik on allapoole avanev parabool, mille haripunkt (kasumi maksimum) asub kohal

$$q_{opt} = \frac{a - p_0}{2b}. \quad (4.3.3)$$



ÜLESANDED

4.3.1. Päevasärgide valmistaja on kindlaks teinud, et summaarne püsikulu on 39 000 eurot ja ühe särgi valmistamise muutuvkulu 10 eurot. Kui suur on q särgi valmistamise kogukulu? Milline on kogutulufunktsioon, kui ühe päevasärgi müügihind on 40 eurot? Leida kasumilävi. Esitada vastav majandussituatsioon graafiliselt.

4.3.2. Kulud ruumide rendile ja kontoritöötajate töötasule on kuus 5500 eurot. Ühe toote tootmiskulud on 40 eurot. Leida

a) firma kogukulufunktsioon;

b) summaarsed kulud kuus 1000 toote valmistamisel.

4.3.3. Millised järgmistest funktsioonidest ei saa olla kulufunktsioonid? Miks?

a) $C(q) = -8q + 40$;

b) $C(q) = 90q - 3000$;

c) $y(x) = 0,7x + 420$.

4.3.4.* Ventilaator pannakse kokku mootorist, tiivikust ja korpusest. Mootorite jaoks tehtavad kulutused n ventilaatori valmistamisel on $f(n) = 300n + 4000$ ja tiiviku ning korpuse jaoks tehtavad kulutused n ventilaatori valmistamisel on $g(n) = 200n + 3000$. Leida


a) funktsioon $C(n)$, mis kirjeldaks summaarseid kulusid n ventilaatori valmistamisel;

b) summaarsed kulud 150 ventilaatori valmistamiseks.


4.3.5.* Kaubarude tellimisprotsessi analüüs on näidanud, et tellimuse koordineerimiseks ja vormistamiseks kulub ligikaudu 15 tundi tööaega sõltumata tellimuse suuruselt. Tellimuste vormistamisega tegeleva töötaja töötasuks kulub 10 eurot töötunni kohta. Kulude analüüs näitas, et 50 tellimuse kohta kulus 1450 eurot paberi, postikulude ja telefonikõnede peale. Ühe partii kättetoimetamistasu on 50 eurot. Leida

a) ühe partii hankekulud;

b) kogukulud ühe partii kohta (hankekulud + kauba maksumus), kui hangitava kauba hind on 5 eurot.

4.3.6.  Junior Achievement kodulehelt <http://www.ja.ee/> leida Tallinna Saksa Gümnaasiumi õpilasfirma New Hand MK 2012. aasta aruanne; kirjutada sellest välja müüdüd toodete arv, kõik kulud, tulud ja kasum. Leida

a) muutuvad kulud; b) püsikulud; c) keskmine kogukulu; d) keskmine muutuvkulu; e) keskmine püsikulu; f) keskmine tulu; g) keskmine kasum.

4.3.7.  Tulude ja kuludega tuleb tegemist teha ka raha kulutamisel ning isikliku eelarve planeerimisel. Lahendada veebiaadressil <http://kool.minuraha.ee/minu-raha-paev/>

asuv ülesanne perekond Tamme eelarve koostamise kohta ning vastata ülesande juures olevatele küsimustele.

4.3.8. Kirjutada välja firma tulufunktsioon, kui toote hind on püsivalt 25 eurot.

4.3.9. Firma tootmiskulud q toote valmistamisel avalduvad järgmiselt: $C(q) = 3q + 10000$. Saadav tulu on $R(q) = 5q$. Leida:

a) kuidas kasum sõltub tootmismahust (toodete arvust) q ;

b) kui suur on kasum 40 000 toote valmistamisel.

4.3.10. Leida firma tulufunktsioon, kui toote hind p sõltub kogusest q järgmiselt:

$$p(q) = 1800 - 20q.$$

4.3.11. On antud firma kulufunktsioon $C(q) = 25 + 3q$, kus q on tootmismaht. Hind p sõltub nõutavast kogusest järgmiselt: $p(q) = 28 - 2q$. Leida avaldis firma kasumi arvutamiseks.

4.3.12. Muutuvkulu ühe toote kohta on neli eurot. Lisaks sellele kulub kuus 900 eurot ruumide rentimiseks ja 1500 eurot kontoritöötajate palkadeks. Leida firma kulufunktsioon.

4.3.13. Leida firma tulufunktsioon, kui pakutakse teenust hinnaga 8 eurot tund.

4.3.14. Jürgenil on ühe kuu jooksul võimalik õunte ja pirnide ostmiseks kulutada 10,8 eurot. Õunte hind on 0,8 eurot / kg ja pirnide hind 1,2 eurot / kg. Leida

- eelarvekitsendus antud hindade ja eelarve korral;
- eelarvekitsendus juhul, kui eelarve on 25% väiksem;
- eelarvekitsendus juhul, kui pirnide hind 50% suurem ;
- mitu kg pirne saab Jürgen ühes kuus osta, kui ta ostab ühes kuus 6 kg õunu;
- mitu kg pirne saab Jürgen ühes kuus osta, kui ta ostab ühes kuus 4 kg õunu.

4.3.15. Ettevõtte valmistab jalgpalle. Materjali ja tööjõu kulu ühe palli valmistamiseks on 10 eurot, summaarne püsikulu 300 eurot nädalas. Leida tootmise kogukulufunktsioon sõltuvana tootmismahust q . Mitu palli tuleb müüa, et ettevõtte saaks kasumit, kui ühe palli müügihind on 30 eurot?

4.3.16.** Antud toote valmistamise püsikulu on 1000 eurot. Esimese tooteühiku valmistamine nõuab 50 eurot täiendavat kulu. Iga järgmine toode nõuab 10 eurot enam kui eelmine. Avaldada kogukulufunktsioon valemiga.

4.3.17.** Ettevõtte toodab vaid ühte liiki tooteid, kusjuures tootmise püsikulu on 400 eurot nädalas. Nädalas valmistatud toodete hulga q sõltuvust kulutatud tooraine hulgast r väljendab funktsioon $q = \sqrt{1000r - 500}$. Tooraine ühe ühiku hind on 1 euro, valmistoote ühe ühiku turuhind on 12 eurot Leida

- tootmise kogukulufunktsioon $C(q)$;
- kogutulufunktsioon $R(q)$ ja kasumifunktsioon.

4.3.18.* Ettevõtte toodab tooteid, mille nõudlusfunktsioon on $q = 125 - 1,25p$, ettevõtte tootmise kogukulu on $C(q) = 0,8q^2 + 16q + 310,4$. Milline peab olema toodetud ja müüdüd toodangu maht q , et ettevõtte oleks kasumis?

4.3.19.** Kauba nõudlus on avaldatav valemiga $q = -2p + 400$, pakkumine aga valemiga $q = 49p - 20$. Leida

- turutasakaal ja müüjate tulu;
- hind, mille puhul pakutava koguse ülejääk võrdub nõutava kogusega;
- hind, mille puhul nõutav kogus ületab kahekordselt pakutava koguse.

4.3.20.* Leida kasumifunktsioon ja kasumilävi, kui nõudlusfunktsioon on $q = 12,25 - 0,25p$ ja keskmised kulud avalduvad valemiga $AC(q) = 3q$.

4.3.21.** Milliste q väärtuste korral saab ettevõtte kasumit, kui nõudlusfunktsioon on

$$p(q) = 65 - 8q \text{ ja keskmised kulud avalduvad kujul } AC(q) = 2q + 5 + \frac{80}{q}?$$

4.3.22.* Fimal õnnestub ära müüa kogu toodang, kusjuures q toote valmistamisel nädalas on kogukulud $300q + 2000$. Nõudluse analüüs näitab, et nõudlust kirjeldab avaldis $500 - 2q$. Leida


- a) tulufunktsioon ja kasumifunktsioon;
- b) kasumi suurus koguste 40 ja 100 korral;
- c) optimaalne tootmismahut ja maksimaalne kasum.

4.3.23. Millised järgmistest avaldistest võivad kirjeldada kasumifunktsiooni?

- a) $-5q^2 + 60q + 7000$;
- b) $-20q^2 + 100q - 15\,000$;
- c) $1,5q^2 + 100q - 15\,000$.

4.3.24.* Kulude analüüs näitas, et püsikulud nädalas on 8000 eurot ja muutuvkulu tooteühiku kohta on 500 eurot. Nõudluse analüüsil saadi nõudlusfunktsiooniks $p(q) = 1000 - 0,71q$, kus p on hind ja q tootmismahut. Leida

- a) kasumi sõltuvus tootmismahust;
- b) kasumi suurus, kui tootmismahut on 300 toodet nädalas;
- c) optimaalne tootmismahut ja maksimaalne kasum.

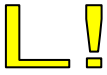
4.3.25. *  Ettevõtte kulude analüüs näitas, et ühe kuu tootmiskulud on kirjeldatavad funktsiooniga $C(q) = 4q + 100$, kus q (ei pea olema täisarv) on tootmismahut. Nõudluse analüüs näitas, et nõudlusfunktsioon on lineaarne ja avaldub kujul $q = 21 - 0,25p$, kus p on hind.

Märkus: osade b), c) ja d) jaoks on eraldi tööleht.

- a) Leida ettevõtte tulu- ja kasumifunktsioon.
- b) Leida tabelarvutusprogrammis kulu, tulu ja kasumi väärtus tootmismahut q vahemikus 2 kuni 18.
- c) Konstrueerida tabelarvutusprogrammis funktsioonide $R(q)$ ja $\pi(q)$ graafikud ning määrata, milliste q väärtuste korral on tulu ja kasum maksimaalsed ning leida maksimaalne tulu ja maksimaalne kasum.
- d) Kontrollida eelnevas punktis c) saadud tulemusi valemitega (4.3.2) ja (4.3.3).



Test asub e-õppekeskkonnas *Moodle*.



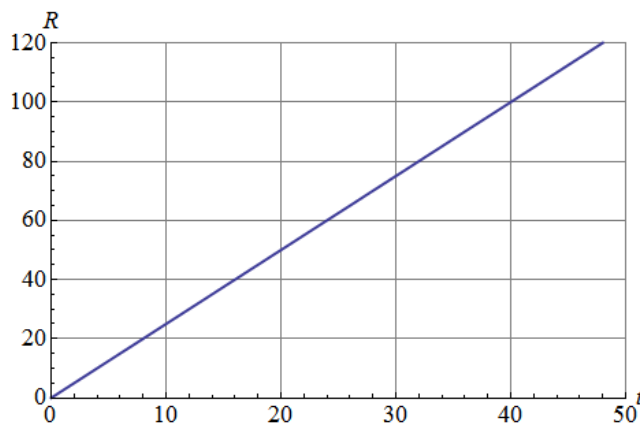
KIRJANDUST LUGEMISEKS

- Aasma, A., Kallam, H., Levin, A. Majandusmatemaatika alused. Tallinn, Kirjastus „Ilo“, 2005. Lk 120-125, 133.
- Arrak, A., Eamets, R., Krinal, V. jt. Majanduse algkursus. Tallinn, 1995. Lk 78-84, 93-98, 129-135.
- Eamets, R., Kaasa, A., Kaldaru, H., Trasberg, V. Sissejuhatus majandusteooriasse. Tartu, Tartu Ülikooli Kirjastus, 2005. Lk 39-44, 76-79.
- Ettevõtlikkusest ettevõtluseni: gümnaasiumiõpik. Toimetajad T. Saal jt. Tallinn, SA Teadlik Valik, 2012. Lk 19-21, 125-128.
- Majanduse ABC / Arrak, A., jt. III trükk. Tartu, Avatar OÜ, 2002. Lk 152-162, 166-177.
- Majandusõpik gümnaasiumile. Koostajad ja autorid L. Kulu jt. Tallinn, Junior Achievement Eesti AS, 2011. Lk 107-109.
- Kerem, K., Randveer, M. Mikro- ja makroökonomika põhikursus. 5., parandatud ja täiendatud trükk, Tallinn, Külim, 2007. Lk 34-42, 43-58.



ÜLESANNETE VASTUSED

- 4.1.1.** a) Firmade A , B ja C taksosõidu maksumused M_A , M_B ja M_C lineaarfunktsioonina: $M_A(s) = 2,88 + 0,65s$, $M_B(s) = 1,99 + 0,49s$, $M_C(s) = 2,50 + 0,42s$; b) 30 km pikkune sõit maksab firma A taksoga 22,3 eurot, firma B taksoga 16,69 eurot, firma C taksoga 15,1 eurot; 7 km pikkune sõit maksab firma A taksoga 7,43 eurot, firma B taksoga 5,42 eurot, firma C taksoga 4,44 eurot; 14 km pikkune sõit firma A taksoga 11,98 eurot, firma B taksoga 8,85 eurot, firma C taksoga 8,38 eurot. **4.1.2.** a) 21 kuud; b) $R = 2,5t$ (vt joonisel esitatud graafikut).



Graafik ülesande 4.1.2 osa b) vastuse juurde.

- 4.2.1.** $p \in [0; 200)$. **4.2.2.** Jah, $p \in [0; 25)$. **4.2.3.** $p \in [4; \infty)$. **4.2.4.** Jah, $p \in (2; \infty)$. **4.2.5.** Nõudlusfunktsioonid 1 ja 5; pakkumisfunktsioonid 2, 3 ja 4. **4.2.6.** a) nõudlusfunktsioon; b) pakkumisfunktsioon. **4.2.7.** a) 3300; b) $p = 66$; c) $p = 6$, $q = 3000$; d) i) pakkumine ületab nõudlust, ii) nõudlus ületab pakkumist. **4.2.8.** $q = 22 - 0,4p$. **4.2.9.** $q_M = 350$, $q_N = 250$, $p = 980$ eurot. **4.2.10.** Nõudlusfunktsioon $p = 7,25 - 0,00025q$, nõutav kogus on 0, kui $p = 7,25$ eurot; nõutav kogus kasvab 20 000 pakini kuus, kui $p = 2,25$ eurot. **4.2.11.** $q = 20 + 6p$. **4.2.12.** Ligikaudu 1784 eurot. Käibemaksu puudumisel on läbimüük 6000 tonni. **4.2.13.** Esialgsed tasakaaluväärtused $p = 6$, $q = 13$; käibemaksu lisamisel realiseeritakse kaupa turul hinnaga $p = 6,6$ ja käibemaksust 60% lisandus esialgsele realiseerimishinnale. **4.2.14.** Nõutav kogus väheneb, nõudlushind suureneb; suurendades käibemaksu kuni 58,33 protsendini, laekuv käibemaksusumma suureneb, edasine käibemaksu suurendamine põhjustab käibemaksu laekumise kahanemise.
- 4.3.1.** $C(q) = 10q + 40\,000$, $R(q) = 400q + 1\,600\,000$. **4.3.2.** $C(q) = 40q + 5500$, $C(100) = 9500$ eurot. **4.3.3.** a), b). **4.3.4.** a) $C(n) = 500n + 7000$, b) 82000 eurot. **4.3.5.** a) 229 eurot, b) $C(n) = 5n + 229$, kus n on partiis olevate kaupade hulk. **4.3.6.** a) 75,58 eurot; b) 18,36 eurot; c) $\frac{93,94}{21} \approx 4,47$ eurot; d) $\frac{75,58}{21} \approx 3,60$ eurot; e) $\frac{18,36}{21} \approx 0,87$ eurot; f) $\frac{112}{21} \approx 5,33$ eurot; g) $\frac{18,06}{21} \approx 0,86$ eurot. **4.3.8.** $R(q) = 25q$. **4.3.9.** a) $\pi(q) = 2q - 10\,000$; b) 70 000 eurot.
- 4.3.10.** $R(q) = 1800q - 20q^2$. **4.3.11.** $\pi(q) = -2q^2 + 25q - 25$. **4.3.12.** $C(q) = 4q + 2400$. **4.3.13.** $R(q) = 8q$, kus q on tundide arv. **4.3.14.** a) $0,8x + 1,2y = 10,8$; b) $0,8x + 1,2y = 8,1$; c) $0,8x + 1,8y = 10,8$; d) 5 kg; e) 7,5 kg. **4.3.15.** $C(q) = 10q + 300$, $q > 15$.
- 4.3.16.** $C(q) = 5q^2 + 45q + 1000$. **4.3.17.** a) $C(q) = 0,25q^2 + \frac{275}{4}$; b) tulufunktsioon $R(q) = 12q$, kasumifunktsioon $\pi(q) = 12q - 0,001q^2 - 400,5$. **4.3.18.** $4 < q < 48,5$. **4.3.19.** a) $p^* \approx 8,24$, $q^* \approx 383,52$; tulu ligikaudu 3160 rahaühikut; b) $p \approx 15,47$, c) $p = 3,6$.
- 4.3.20.** $\pi(q) = -7q^2 + 49q$. **4.3.21.** $2 < q < 4$. **4.3.22.** a) $R(q) = 500q - 2q^2$, $\pi(q) = -2q^2 + 200q - 2000$; b) $\pi(40) = 2800$; $\pi(100) = -2000$; c) $q_{opt} = 50$, $\pi(50) = 3000$.
- 4.3.23.** b), c). **4.3.24.** a) $\pi(q) = -0,71q^2 + 500q - 8000$; b) $\pi(300) = 78\,100$ eurot nädalas; c) $q_{opt} = 352$, $\pi(352) = 80\,028$. **4.3.25.** a) $R(q) = 84q - 4q^2$; c) $\pi_{max} = \pi(10) = 300$, $R_{max} = R(10,5) = 441$.