Determinandi mõiste ja arvutamine**

Determinant on ruutmaatriksile teatud eeskirja järgi vastavusse seatav arv. Vaatame missugune see eeskiri on. Selleks viime sisse mõned abimõisted.

Permutatsioonid

Olgu antud mingi lõplik arvhulk $M = \{1, 2,\ 3\ .,,, n\}$, mis koosneb *n* elemendist.

Definitsioon. Lõpliku hulga *M* elementide ümberjärjestust, milles hulga *M* iga element esineb täpselt üks kord, nimetatakse hulga *M* **permutatsiooniks**. Seega permutatsioon on (või sellele vastab) kindel järjestus naturaalarvudest $1, 2,\ 3\ .,,, n$.

Kõigi permutatsioonide arv *n* elemendist on *n* faktoriaal ehk $\boldsymbol{P_n} = \boldsymbol{n}!$

Näide
Moodustame kõik kolmandat järku permutatsioonid:
(1, 2, 3) (2, 3, 1)
(1, 3, 2) (3, 1, 2)
(2, 1, 3) (3, 2, 1)

Inversioonid

Definitsioon. Öeldakse, et permutatsoonis

$$(j_1, j_2, \ldots, j_k, \ldots . j_l, \ldots . j_n)$$

elemendid j_k ja j_l moodustavad **inversiooni** kui

$$j_k > j_l \quad (k < l),$$

st suurem element paikneb eespool. Teisiti öeldes, inversiooniks nimetatakse olukorda permutatsioonis, kus suurema järjekorranumbriga element asub väiksema järjekorranumbriga elemendi ees ((üldisemalt olukorda, kus kahe suvalise hulga elemendi järjestus on algjärjestuse suhtes rikutud).)

Näide

1) 3.järku permutatsioonis (2, 3, 1) on 2 inversiooni (2 asub 1 ees; 3 asub 1 ees).
2) 3. järku permutatsionis (3, 1, 2) moodustavad inversiooni paarid 3, 1 ja 3, 2. Seega on 2 inversiooni.
3) Leiame inversioonide arvu 4.järku permutsioonis (3, 2, 1, 4). Kahekaupa arve grupeerides saame moodustada järgmised paarid:

   1) 3, 2   2) 3, 1   3) 3, 4   4) 2, 1

   5) 2, 4   6) 1, 4

   Inversioonide arvu leidmiseks leiame nende paaride arvu, kus tagumine liige on väiksem kui esimene. Sellisteks on paarid 1), 2) ja 4). Seega on inversioonide arv vaadeldavas substitutsioonis 3.

4) Permutatsioonis (3, 5, 2, 4, 1) on 7 inversiooni.

Paaris- ja paaritu permutatsioon

Permutatsiooni, mille inversioonde arv on **paarisarv (paaritu arv)**, nimetatakse **paarispermutatsiooniks (paarituks permutatsiooniks)**.

Permutatsiooni kahe elemendi ümberpaigutamisel muutub selle paarsus vastupidiseks (**transpositsioon**)

Tähistame kõikide inversioonide arvu permutatsioonis $(j_{1,}, j_2,\ \ldots ., j_n)$ sümboliga

$$\sigma(j_{1,}, j_2,\ \ldots ., j_n).$$

Näide

$\sigma(2{,}3{,}1{,}4) = 2$ (paaris permutatsioon)

$\sigma(4{,}3{,}1{,}2) = 5$ (paaritu permutatsioon)

$\sigma(4{,}2{,}1{,}3) = 4$ (paaris permutatsioon)

Determinandi mõiste

Definitsioon. Ruutmaatriksi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

determinandiks nimetatakse summat

$$\sum_{(j)} (-1)^{\sigma(j_1, j_2, \dots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} \qquad (*)$$

kus iga n-ndat järku permuatsiooni $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ jaoks on üks liidetav

$$(-1)^{\sigma(j_1, j_2, \dots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}.$$

Märkused:

1) summas (*) on $n!$ liidetavat;
2) summat (*) tähistatakse

$$\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

3) summa (*) liidetavad sisaldavad ühe elemendi igast reast ja ühe elemendi igast veerust;
4) summa (*) igas liidetavas on n elementi;
5) igas liideavas tegurid on paigutatud esimeste indeksite kasvavas järjekorras ehk

$$a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{nj_n}.$$

ning seega teised indeksid moodustavad n-järku permutatsiooni. Permutatsioone on kokku $n!$.
6) summa (*) liidetava märki määrab avaldis $(-1)^{\sigma(j_1, j_2, \dots, j_n)}$, kus $\sigma(j_1, j_2, \dots, j_n)$ on inversioonude arv permutatsioonis $(j_1, j_2, \dots, j_n)$.

Näide 2-järku determinandi jaoks

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{\sigma(1,2)} a_{11} a_{22} + (-1)^{\sigma(2,1)} a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

Näide 3-järku determinandi jaoks

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (-1)^{\sigma(1,2,3)} a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + (-1)^{\sigma(1,3,2)} a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + \\ &(-1)^{\sigma(2,1,3)} a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + (-1)^{\sigma(2,3,1)} a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + \\ &(-1)^{\sigma(3,1,2)} a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + (-1)^{\sigma(3,2,1)} a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} = \end{aligned}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

$$\begin{aligned} &= (-1)^0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 0 + (-1)^1 \cdot 1 \cdot (-2) \cdot 1 + \\ &(-1)^1 \cdot (-1) \cdot 0 \cdot 0 + (-1)^2 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot 1 + \\ &(-1)^2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 1 + (-1)^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = \\ &= 2 \end{aligned}$$

Märkused.

1) Definitsiooni põhine arvutus on väga keeruline (4-ndat järku determinandi arvutamisel on tegu $4! = 24$ liidetavaga , 5-ndat järku determinandi arvutamisel on tegu $5! = 120$ liidetavaga)..

2) Kõrgemat järku determinantideks loetakse determinante alates IV järgust ja nende arvutamisel on võimalik kasutada determinandi ritta arendusteoreemi **.**