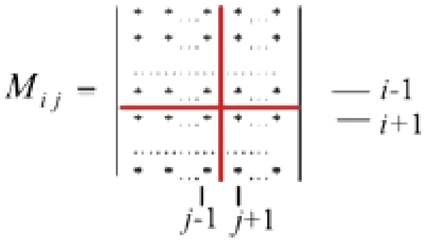
<u>Determinandi arvutamine (arendusteoreem)</u>

Kõrgemat järku determinantideks loetakse determinante alates IV järgust ja nende arvutamisel on võimalik kasutada determinandi ritta (veergu) arendusteoreemi **.**

Selleks viime sisse mõned abimõisted.

Determinandi elemendi miinor ja alamdeterminant

Definitsioon. Maatriksi A elemendi a_{ij} **miinoriks** nimetatakse determinanti, mis saadakse antud maatriksist või determinandist *i*-nda rea ja *j*-nda veeru ärajätmisel. Miinorit tähistatakse M_{ij}.



Näide1

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} \Rightarrow \quad M_{11}=7, M_{12}=2, M_{21}=0, M_{22}=1.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 4 & -4 \end{vmatrix} \Rightarrow \quad M_{11}=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}=-4;\ M_{12}=\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}=-14;\ M_{13}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}=17;$$

$$M_{21}=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}=4;\ M_{22}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}=-7;\ M_{23}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}=4;\ M_{31}=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=3;$$

$$M_{32}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=0;\ M_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=3.$$

Definitsioon. Maatriksi A elemendi a_{ik} **alamdeterminandiks** ehk **algebraliseks täiendiks** nimetatakse selle elemendi miinorit, kui indeksite summa $i+j$ on paarisarv ja miinorit märgiga -, kui indeksite summa on paaritu arv. Alamdeterminanti tähistatakse A_{ij} .

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Näide 2

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 7 & -3 & 4 \end{vmatrix} \qquad M_{23}=\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}=-9-42=-51 \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot(-51)=51$$ (sest summa „2+3“ on paarituarvuline)

Arendusteoreem

Idee: Determinandi väärtuse leidmine taandub ühe võrra madalamat järku determinandi väärtuse leidmisele.

Teoreem (arendusteoreem). Determinandi väärtus võrdub tema mingi rea või veeru elementide ja vastavate elementide alamdeterminantide korrutiste summaga*:*

$$detA = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \ (arendamine\ i\text{-}nda\ rea\ järgi\ )$$

või

$$detA = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \ (arendamine\ j\text{-}nda\ veeru\ järgi\ )$$

Näide 3

Kolmandat järku maatriksi determinandi võib arvutada nii (arendame, näiteks, esimese rea järgi):

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Näide 4

Arendada determinant teise rea järgi ja leida seejärel tema väärtus:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + (-1) \cdot A_{23} = 5 \cdot (-M_{21}) + 1 \cdot M_{22} + (-1) \cdot (-M_{23}) =$$

$$= -5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -5 \cdot (-9) + (-6-8) + (0-(-6)) = 45 - 14 + 6 = 37.$$

Näide 5

arendame 1. rea järgi

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= (0 \cdot 9 - 8 \cdot 6) + 2 \cdot (4 \cdot 9 - (-7) \cdot 6) + 3 \cdot (4 \cdot 8 - (-7) \cdot 0) =$$

$$= 0 - 48 + 2 \cdot (36 + 42) + 3 \cdot (32 - 0) = -48 + 156 + 96 = 204$$

Arendusteoreem võimaldab *n* – järku determinandi arvutamise taandada (*n* – 1) –järku determinantide arvutamisele, seega väheneb arvutustöö.

Näide 6

arendame 1. rea järgi

$$\begin{vmatrix} -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} -9 & 2 & 7 \\ 5 & 1 & 2 \\ -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 7 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 5 & -9 & 7 \\ 2 & 5 & 2 \\ 4 & -6 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ 4 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 5 & -9 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 201$$

Näide 7

arendame 4. veeru järgi

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix} = -8 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & -7 \\ -4 & 3 & 5 \end{vmatrix} + (-6) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 \\ 2 & -5 & -7 \\ -4 & 3 & 5 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 \\ -3 & 2 & 4 \\ -4 & 3 & 5 \end{vmatrix} + (-6) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 \\ -3 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & -7 \end{vmatrix}$$

Determinante on võimalik arvutada otseselt teoreemi põhjal või kasutades determinandi eelnevat lihtsustamist põhiomaduste põhjal.