Determinandi omadused

<u>Idee:</u> Arendusvalemid on determinantide arvutamisel üldiselt liiga töömahukad. Mugavam on arvutada determinante alljärgnevate omaduste abil.

Märkus. **Omadused <u>on sõnastatud ridade</u> kohta. Kõik omadused,mis kehtivad ridade kohta, <u>kehtivad ka veergude</u> kohta**.

Olgu antud $n \times n$ maatriks A. Maatriksi determinandil on jägrmised omadused:

***Omadus 1. Maatriksi transponeerimisel determinant ei muutu*.**

$$detA = detA^T$$

Näide 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5$$

Omadus 2. Kui determinandi üks rida koosneb nullidest, siis determinant võrdub nulliga.

Näide 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 & 100 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

Omadus 3. Kui determinandis on kaks võrdset rida, siis determinant võrdub nulliga.

Näide 3

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

Omadus 4. Kui determinandis on kaks proportsionaalset rida, siis determinant võrdub nulliga.

Näide 4

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \\ 4 & 6 & 16 \end{vmatrix} = 0$$

Omadus 5. Kui determinandi ühe rea elemente korrutada nullist erineva arvuga k, siis determinandi väärtus suureneb k korda.

Näide 5

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$$

Korrutame teise rea elemente arvuga 5

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 15 & 20 \end{vmatrix} = -10$$

Omadus 6. Deteminandi reast võib ühise teguri tuua determinandi märgi ette

Näide 6

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & 8 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 50$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & 8 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 9 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 25 = 50$$

b)

$$\begin{vmatrix} 26 & -13 & 39 \\ 2 & 7 & 15 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 13 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 7 & 15 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 13 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 7 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Omadus 7. Kui determinandis vahetada omavahel kaks rida, siis determinandi märk muutub vastupidiseks.

Näide 7

$$Antud: \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 15 = 23;$$

$$Vahetame\ veerud: \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -15 - 8 = -23;$$

$$Vahetame\ read \quad \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -15 - 8 = -23 .$$

Näide 8

$$Antud: \begin{vmatrix} 1 & 9 & 8 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 50$$

$$Vahetame\ read: \begin{vmatrix} 1 & 9 & 8 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = -50$$

Näide 9

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Omadus 8. Olgu determinandi mingi rea element kahe liidetava summa. Siis avaldub determinant kahe determinandi summana. Esimeses determinandis on vaadeldavas reas esimesed liidetavad ja teise determinandi vaadeldavas reas on teisedliidetavad. Ülejäänud read on endised:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k1}+c_{k1} & \cdots & b_{kn}+c_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{k1} & \cdots & c_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Omadus 9. Maatriksite korrutise determinant võrdub maatriksite determinantide korrutisega:

$$\det(A \cdot B) = detA \cdot detB$$

Näide 10

$$Antud: A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix};$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 7\cdot 4 + (-3)\cdot 5 & 7\cdot(-1) + (-3)\cdot 3 \\ 0\cdot 4 + 2\cdot 5 & 0\cdot(-1) + 2\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -16 \\ 10 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\det\ A = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 14, \quad \det\ B = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 12 - (-5) = 17,$$

$$\det\ (A \cdot B) = \begin{vmatrix} 13 & -16 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} = 13 \cdot 6 - (-16) \cdot 10 = 78 + 160 = 238,$$

$$\det\ A \cdot \det\ B = 14 \cdot 17 = 238.$$

$$\det\ (A \cdot B) = 238 = \det\ A \cdot \det\ B = 238.$$

Näide 11

Olgu antud maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ ja } B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 7 \\ 5 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \text{ siis}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 7 \\ 5 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 19 & 0 \\ 17 & 43 & 8 \\ 12 & 9 & -16 \end{pmatrix}$$

$$\det(A \cdot B) = \begin{vmatrix} 8 & 19 & 0 \\ 17 & 43 & 8 \\ 12 & 9 & -16 \end{vmatrix} = 912$$

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 16 \text{ ning } detB = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 7 \\ 5 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 57. \text{ Tõepoolest, } 912 = 16 \cdot 57$$

Omadus 10. Kui determinandil on peadiagonaalist allapoole (ülalpoole) on ainult nullid, siis võrdub determinant peadiagonaali elementide korrutisega.

Näide 12

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 100 & -2 & 0 \\ 200 & 300 & -3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-2)\cdot(-3) = -6.$$

Näide 13

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 7 \\ 0 & -3 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-3)\cdot 5\cdot(-1) = 15$$

Omadus 11. Determinandi väärtus ei muutu, kui tema mingi rea elementidele liita teise rea vastavad elemendid, mida on eelnevalt korrutatud nullist erineva arvuga.

See omadus ütleb näiteks, et

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + 5a_3 & b_2 + 5b_3 & c_2 + 5c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Rida mida korrutasime arvuga ja liitsime teisele reale on muudatusteta ümberkirjutatud.

Antud omadust kasutatakse arvutuste lihtsustamisel kõige sagedamini siis, kui soovitakse teatud elemendid teisenduse abil nullideks viia.

Näide 14

$$Antud: \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3.$$

Liidame teisele reale neljakordne esimene

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} + \mathrm{I}\cdot 4 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4+(-1)\cdot 4 & -5+2\cdot 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 0 = -3$$

Näide 15

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & 8 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 50$$

Korrutame esimese rea elemente arvuga 2 ning liidame saadud rida kolmandale reale:

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & 8 \\ 2 & 4 & 8 \\ 5 & 18 & 21 \end{vmatrix} = 50$$

Näide 16

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2+8 & 2-2 & 1+6 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ +2\ \mathrm{I} \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 10 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 10-10 & 0-0 & 7+30 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -10\ \mathrm{III} \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 37 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 37 + 0 - 0 - 0 - 0 = -37.$$

Näide 17

$$\begin{vmatrix} 13 & 17 & 4 \\ 28 & 33 & 8 \\ 40 & 54 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 17 & 4 \\ 28-26 & 33-34 & 8-8 \\ 40-39 & 54-51 & 13-12 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -2\ \mathrm{I} \\ -3\ \mathrm{I} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 13 & 17 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 9 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -4\ \mathrm{III} \\ \\ \\ \end{matrix} = -9 - 10 = -19.$$