Pöördmaatriks

Pöördmatriksit saab leida vaid ruutmaatriksi korral.

Definitsioon. Maatriksit A nimetatakse **regulaarseks**, kui det $A \neq 0$.

Definitsioon. Maatriksit A nimetatakse **singulaarseks**, kui det $A = 0$.

Definitsioon. Regulaarse maatriksi A **pöördmaatrikisiks** nimetatakse maatriksit A^{-1}, mille korral

$$\boxed{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E},$$

kus E on sobivat järku ühikmaatriks.

Teoreem. Maatriksil A leidub pöördmaatriks A^{-1} parajasti siis, kui maatriks A on regulaarne.

Pöördmaatriksi leidmise viisid

Vaatleme kahte pöödmaatriksi leidmise võimalust.

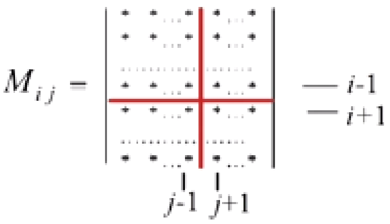
I võimalus: valemi abil (alamdeterminantide abil)

Olgu antud ruutmaatriks

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Tuletame meelde 2 definitsiooni:

Definitsioon. Maatriksi A elemendi a_{ij} **miinoriks** nimetatakse determinanti, mis saadakse antud maatriksist või determinandist i-nda rea ja j-nda veeru ärajätmisel. Miinorit tähistatakse M_{ij}.



Definitsioon. Maatriksi A elemendi a_{ik} **alamdeterminandiks** ehk **algebraliseks täiendiks** nimetatakse selle elemendi miinorit, kui indeksite summa $i+j$ on paarisarv ja miinorit märgiga -, kui indeksite summa on paaritu arv. Alamdeterminanti tähistatakse A_{ij} .

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Näide 1:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 7 & -3 & 4 \end{vmatrix} \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 42 = -51 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot (-51) = 51$$

Definitsioon. Ruutmaatriksi A elementide a_{ij} alamdeterminantidest A_{ij} moodustatud maatriksit

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

nimetatakse **adjungeeritud** maatriksiks.

Pöördmaatriksi A^{-1} ja adjungeeritud maatriksi $\widetilde{A}$ vaheline seos avaldub kujul:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot \widetilde{A}}$$

Näide 2: Leida maatriksi $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ pöördmaatriks ja kontrollida.

Lahendus:

1. Arvutame maatriksi determinti $\Delta = 10$. Antud maatriks on regulaarne, kuna maatriksi determinant $\Delta \neq 0$, järelikult saab leida ka pöördmaatriksit.

2. Leiame kõik alamdeterminandid $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$:

$A_{11} = -1, A_{12} = -4, A_{21} = -(-3) = 3, A_{22} = 2.$

3. Koostame adjungeeritud maatriksit $A^* = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Koostame pöördmaatriksit (transponeerime saadud maatriksit ja jagame determinandiga):

$A^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Kontrollime, kas saadud maatriks on algmaatriksi pöördmaatriks. Tuleb veenduda, et $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$:

$\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 & -1 \cdot (-3) + 3 \cdot (-1) \\ -4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 & -4 \cdot (-3) + 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$ Vastus:

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Näide 3. Leida pöördmaatriks A^{-1}, kui $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \\ 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}$.

$detA = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \\ 2 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 21 + 4 + 0 – 0 – 18 – 8 = -1 \neq 0;$

$A_{11} = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 21 – 8 = 13;$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(9-2) = -7;$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 24 - 14 = 10;$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = -6;$

$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3;$

$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = -(3-16) = 13;$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 2;$

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1;$

$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 6 = 1;$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 13 & -6 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \\ 10 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 6 & -2 \\ 7 & -3 & 1 \\ -10 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Kontroll: $AA^{-1} = E$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \\ 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -13 & 6 & -2 \\ 7 & -3 & 1 \\ -10 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13+14-0 & 6-6+0 & -2+2+0 \\ -39+49-10 & 18-21+4 & -6+7-1 \\ -26+56-30 & 12-24-3 & -4+8-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Näide 4: Leida

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Leiame vastavad almdeterminandid.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4,\ A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3,\ A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5,$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,\ A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2,\ A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$
$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1,\ A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2,\ A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7.$$

$detA = 11$

Seega

$$A^{-1}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}4 & -3 & -5\\ 1 & 2 & -4\\ 1 & 2 & 7\end{pmatrix}^T=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ -3 & 2 & 2\\ -5 & -4 & 7\end{pmatrix}$$

Märkus.

Kui 2×2 maatriks A on kujul

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},$$

siis tema pöördmaatriks on leitav valemiga

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}.$$

Näide: Leida

$$\begin{pmatrix}2 & 5\\ -2 & 3\end{pmatrix}^{-1}$$

Lahendus.

$$\begin{pmatrix}2 & 5\\ -2 & 3\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2\cdot 3-5\cdot(-2)}\begin{pmatrix}3 & -5\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}3 & -5\\ 2 & 2\end{pmatrix}.$$

II võimalus*: elementaarteisenduate abil

Algoritm: Ruutmaatriksi pöördmaatriksi leidmiseks tuleb tema kõrvale (alla) kirjutada vastavat järku ühikmaatriks. Teisendades saadud liitmaatriksit ridade (veergude) elementaarteisenduste abil nii, et esialgse maatriksile vastavate veergude (ridade) asemele tekib ühikmaatriks, teisenevad juurdekirjutatud ühikmaatriksi veerud(read) pöördmaatriksiks.

$$(A|E)\ \rightarrow ridade\ elemntaarteisendused\ \rightarrow (E|A^{-1}).$$

Enne konkreetse näite toomist, vaatleme maatriksi ridade ja veergude elementaarteisendusi.

Elementaarteisendused maatriksi ridade ja veergudega

Vaatleme *(m ×n)*- maatriksit, ning $c \in R$.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Kasutades ridade (veergude elementaatreisendusi), saame esialgse maatriksiga **ekvivalentse maatriksi**. Ekvivalentseks olemist tähistatakse sümboliga ~. Näiteks A~B tähendab, et maatriks A on **ekvivalentne ehk samaväärne** maatriksiga B.

***Maatriksi elementaarteisendused*:**

1) maatriksi rea (või veeru) korrutamine nullist erineva arvuga;

$c\cdot$

$$\begin{pmatrix} \dots \\ i \\ \dots \\ j \\ \dots \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \dots \\ c \cdot i \\ \dots \\ j \\ \dots \end{pmatrix}$$

2) maatriksi kahe rea (või veeru) ära vahetamine;

$$\begin{pmatrix} \dots \\ i \\ \dots \\ j \\ \dots \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \dots \\ j \\ \dots \\ i \\ \dots \end{pmatrix}$$

3) maatriksi reale (või veerule) mingiarvuga korrutatud teise rea (või vastavalt – veeru liitmine);

$$\begin{pmatrix} \dots \\ i \\ \dots \\ j \\ \dots \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +c \cdot j \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} \dots \\ i + c \cdot j \\ \dots \\ j \\ \dots \end{pmatrix}$$

4) nullrea (või veeru) ärajatmine.

Näide

Vaatleme maatriksiga $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ ridade elementaarteisendusi:

a) korrutame maatriksi esimese rea läbi arvuga 5

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -15 & -10 \\ -4 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

b) vahetame maatriksi teise ja kolmanda rea

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

c) liidame maatriksi kolmandale reale neljakordse esimese rea

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \\ 9 & 13 \end{pmatrix}$$

d) korrutame maatriksi teise rea läbi arvuga (-1) ning vahetame ära maatriksi esimese ja kolmanda rea

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

e) liidame maatriksi teisele reale (-3)-kordse kolmanda rea ning korrutame maatriksi esimese rea läbi arvuga 4.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 5 & -14 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Definitsioon. Maatriksi **rea juhtelemendiks** nimetatakse selle rea (vasakult) esimest nullist erinevat elementi

Näide.

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{5} \\ 0 & \boxed{1} & 4 \end{pmatrix}$$

Definitsioon. Öeldakse, et maatriks on **trepikujuline ehk treppmaatriks**, kui

1) read, mis koosnevad ainult nullidest, on maatriksi põhjas (all)

2) mistahes rea juhtelement (kui leidub) asetseb rangelt paremal temale eelneva rea juhtelemendist.

Näiteks maatriksitest

$$\begin{pmatrix} 2 & 7,5 & 8 & 3,2 \\ 0 & 3 & 2,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 3,1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 2,2 & 6 \end{pmatrix}$$

esimene on trepikujuline, kuid teine ei ole.

Definitsioon. Öeldakse, et treppmaatriks on **Gaussikujuline**, kui

1) kõik juhtelemndid on võrdesed 1;
2) juhtelemendi kohal on ainult nullid.

Näide

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teoreem. Iga maatriksi saab teisendada treppikujuliseks elementaarteisenduste abil.

Näide Leiame maatriksi A pöördmaatriksi elemntaarteisenduste abil, kui

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -2I \\ +I \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} -2II \\ \\ -2II \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ :7 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right)\begin{array}{l} -5III \\ +3III \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{6}{7} & \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right)$$

Märkus: „-2I“ tähendab, et antud rea elemntidest on lahutatud esimese rea kahekordsed elemnedid.

Seega A pöördmaatriksiks on

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{7} & \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \\ \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

Näide. Leiame maatriksi A pöördmaatriksi elemntaarteisenduste abil, kui

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Märkus: Erinevus eelmisest näidest seisneb selles, et eelmises näites igal sammul nullisime terve veeru ära ühe sammuga. Selles näites nullime algul need veergude elemendid mis seisavad juhtelemndi all, nii seejärel need mis asetsevad juhtelemendi peal.

1.samm: võttes elemndi a_{11} juhtelemendiks nullitame esimese veeru kõik elemndid, v. a. a_{11}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II-2\cdot I \\ III-7\cdot I \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -10 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 11 & -15 & 1 & 0 & -7 \end{array}\right)$$

„II−2·I “ tähendab, et teise rea elemntidest lahutasime esimese rea kahekordsed elemedid.

2.samm: nullitame teise veeru elemndid (neid mis seisavad elemendi a_{22} all)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -10 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 11 & -15 & 1 & 0 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 7\cdot III-11\cdot II \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -10 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & -11 & -27 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -10 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & -11 & -27 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III:5 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -10 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 7/5 & -11/5 & -27/5 \end{array}\right)$$

Jagasime kolmanda rea elemndid 5-ga (eesmärk: saada juhtelemndiks (a_{33}) arv 1). Tulemusena on kõik nullid peadiagonaali all.

3.samm: nullitame kolmanda rea elmendid kolmanda reaabil (ehk elemnendi a_{33} abil)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -10 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 7/5 & -11/5 & -27/5 \end{array}\right) \begin{array}{l} I-3\cdot III \\ II+10\cdot III \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -21/5 & 33/5 & 86/5 \\ 0 & 7 & 0 & 14 & -21 & -56 \\ 0 & 0 & 1 & 7/5 & -11/5 & -27/5 \end{array}\right)$$

Jagame teise rea elemendid 7-ga (eesmärk: saada juhtelemendiks(a_{22}) arv 1)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -21/5 & 33/5 & 86/5 \\ 0 & 7 & 0 & 14 & -21 & -56 \\ 0 & 0 & 1 & 7/5 & -11/5 & -27/5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II:7 \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -21/5 & 33/5 & 86/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 7/5 & -11/5 & -27/5 \end{array}\right)$$

4. samm nullitame teise veeru elemndid (elemendi a_{22} abil)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -21/5 & 33/5 & 86/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 7/5 & -11/5 & -27/5 \end{array}\right) \begin{array}{l} I+II \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11/5 & 18/5 & 46/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 7/5 & -11/5 & -27/5 \end{array}\right)$$

Seega teisendused on läbi. Vasakul on saadud ühikmaatriks. Algse maatriksi *A* pöördmaatriks omab kuju

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -11/5 & 18/5 & 46/5 \\ 2 & -3 & -8 \\ 7/5 & -11/5 & -27/5 \end{pmatrix}$$

Näide

Leiame maatriksi A pöördmaatriks, kui

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 17 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nullime ühe sammuga terve veeru elemendid (v.a juhtelemnet)

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II-2\cdot I \\ \\ IV+I \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II:2 \\ \\ \\ \end{array} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 & -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} I-II \\ \\ III-17\cdot II \\ IV-5\cdot II \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & -1/2 & 2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 & -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 19 & -23/2 & 17 & -17/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -7/2 & 6 & -5/2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III:19 \\ \\ \end{array} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & -1/2 & 2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 & -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -23/38 & 17/19 & -17/38 & 1/19 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -7/2 & 6 & -5/2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} I-2\cdot III \\ II+III \\ \\ IV-6\cdot III \end{array} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 27/38 & 4/19 & 15/38 & -2/19 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2/19 & -2/19 & 1/19 & 1/19 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -23/38 & 17/19 & -17/38 & 1/19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5/38 & 12/19 & 7/38 & -6/19 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ IV:\frac{5}{38} \end{array} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 27/38 & 4/19 & 15/38 & -2/19 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2/19 & -2/19 & 1/19 & 1/19 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -23/38 & 17/19 & -17/38 & 1/19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 24/5 & 7/5 & -12/5 & 38/5 \end{array}\right) \begin{array}{l} I-27/38\cdot IV \\ II+2/19\cdot IV \\ III+23/38\cdot IV \\ \\ \end{array} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -16/5 & -3/5 & 8/5 & -27/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2/5 & 1/5 & -1/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 19/5 & 2/5 & -7/5 & 23/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 24/5 & 7/5 & -12/5 & 38/5 \end{array}\right)$$

Seega

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -16/5 & -3/5 & 8/5 & -27/5 \\ 2/5 & 1/5 & -1/5 & 4/5 \\ 19/5 & 2/5 & -7/5 & 23/5 \\ 24/5 & 7/5 & -12/5 & 38/5 \end{pmatrix}.$$

Näide Leiame maatriksi A pöördmaatriks, kui

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 9 \\ -4 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} I:2 \\ \\ \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 3/2 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II-7\cdot I \to \\ III+4\cdot I \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3/2 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -19/2 & -5 & -7/2 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & 6 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) II:\left(-\frac{19}{2}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3/2 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 10/19 & 7/19 & -2/19 & 0 \\ 0 & 11 & 6 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} I-3/2\cdot II \\ \qquad\qquad \to \\ III-11\cdot II \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 23/19 & -1/19 & 3/19 & 0 \\ 0 & 1 & 10/19 & 7/19 & -2/19 & 0 \\ 0 & 0 & 4/19 & -39/19 & 22/19 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III:4/19 \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 23/19 & -1/19 & 3/19 & 0 \\ 0 & 1 & 10/19 & 7/19 & -2/19 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -39/4 & 11/2 & 19/4 \end{array}\right) \begin{array}{l} I-23/19\cdot III \\ II-10/19\cdot III \to \\ \\ \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 47/4 & -13/2 & -23/4 \\ 0 & 1 & 0 & 11/2 & -3 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & -39/4 & 11/2 & 19/4 \end{array}\right)$$

Seega pöördmaatriks on

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 47/4 & -13/2 & -23/4 \\ 11/2 & -3 & -5/2 \\ -39/4 & 11/2 & 19/4 \end{pmatrix}$$

Teoreem. Regulaarmaatriksi pöördmaatriks on määratud üheselt.

Maatriksi A **pöördmaatriksil** A^{-1} on järgmised **omadused**:

1) Kui n-järku maatriksil A leidub pöördmaatriks, siis nii maatriks A kui ka tema pöördmaatriks on regulaarsed.
2) Maatriksi ja tema pöördmaatriksi determinandid on teineteise pöördarvud.
3) Regulaarsete n-järku maatriksite A ja B korral kehtib valem

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$$

4) Maatriksi A^{-1} pöördmaatriksiks on maatriks A, s. t.

$$\boxed{(A^{-1})^{-1} = A.}$$

5) Uhikmaatriksi E pöördmaatriks on ta ise, s. t.

$$\boxed{E^{-1}= E}.$$

6) Maatriksi transponeerimine ja pöördmaatriksi leidmise operatsioon on kommuteeruvad ehk vahetatavad, s. t.

$$\boxed{(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.}$$

7) Iga arvu λ korral kehtib

$$\boxed{(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}}.$$