Maatriksvõrrand

Pöördmaatriksi mõiste abil saab lahendada maatriksvõrrandid. Maatriksvõrrand tavaliselt koosneb mitmest maatriksist ja tundmatust maatriksist, mida ongi vaja leida. Maatriksvõrrandi lahendiks on MAATRIKS.

Vaatleme kolm tüüpi maatriksvõrrandeid:

$$AX = B, \qquad XA = B, \qquad AXB = C.$$

I tüüp

Lause 1. Regulaarse A korral on võrrandi $\boxed{AX = B}$ ainus lahend $\boxed{X = A^{-1}B}$.

Põhjendus: korrutame võrrandi $AX = B$ mõlemad pooled vasakult maatriksiga A^{-1}:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$
$$EX = A^{-1}B$$
$$X = A^{-1}B$$

II tüüp

Lause 2 . Regulaarse A korral on võrrandi $\boxed{XA = B}$ ainus lahend $\boxed{X = BA^{-1}}$

Põhjendus: korrutame võrrandi $XA = B$ mõlemad pooled paremalt maatriksiga A^{-1}:

$$XAA^{-1} = BA^{-1}$$
$$XE = BA^{-1}$$
$$X = BA^{-1}$$

III tüüp

Lause 3.Regulaarse A korral on võrrandi $\boxed{AXB = C}$ ainus lahend $\boxed{X = A^{-1}CB^{-1}}$.

Põhjendus: korrutame võrrandi $AXB = C$ mõlemad pooled vasakult maatriksiga A^{-1}:

$$A^{-1}AXB = A^{-1}C$$
$$EXB = A^{-1}C$$
$$XB = A^{-1}C$$

Nüüd kasutades Lause 2, saame võrrandi lahendiks

$$X = A^{-1}CB^{-1}.$$

Näide1: Lahendada maatriksvõrrand $BX = A$, kui $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

Lahendus:

Eelpooltoodud materjali põhjal avaldame $X = B^{-1}A$. Leiame B^{-1} (vt. p.3):

$\det B = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2$, $\det B \neq 0 \Rightarrow$ võrrand lahenduv,

$B_{11} = -4$, $B_{12} = -2$, $B_{21} = -1$, $B_{22} = 0$, $B^{-1} = \dfrac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$;

$$X = B^{-1}A = -\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-4 & -1\\ -2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 5 & -2\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-4\cdot(-1)+(-1)\cdot 5 & -4\cdot 3+(-1)\cdot(-2)\\ -2\cdot(-1)+0\cdot 5 & -2\cdot 3+0\cdot(-2)\end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -10\\ 2 & -6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 5\\ -1 & 3\end{pmatrix}.$$

Kontroll: $BX = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 5\\ -1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot(-1) & 0\cdot 5+1\cdot 3\\ 2\cdot\frac{1}{2}+(-4)\cdot(-1) & 2\cdot 5+(-4)\cdot 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 3\\ 5 & -2\end{pmatrix} = A.$

Näide 2: Lahendada maatriksvõrrand $XB = A$,kui $A = \begin{pmatrix}-1 & 3\\ 5 & -2\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -4\end{pmatrix}$.

Lahendus:

Antud punktis materjali põhjal avaldame X : $X = AB^{-1}$.

B^{-1} on leitud eelmises ülesannes : $B^{-1} = \frac{1}{-2}\cdot\begin{pmatrix}-4 & -1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$;

$$X = AB^{-1} = \begin{pmatrix}-1 & 3\\ 5 & -2\end{pmatrix}\cdot -\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-4 & -1\\ -2 & 0\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-1\cdot(-4)+3\cdot(-2) & -1\cdot(-1)+3\cdot 0\\ 5\cdot(-4)+(-2)\cdot(-2) & 5\cdot(-1)+(-2)\cdot 0\end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -16 & -5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \frac{-1}{2}\\ 8 & \frac{5}{2}\end{pmatrix}.$$

Kontroll:

$$XB = \begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 8 & \frac{5}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot 0+(-\frac{1}{2})\cdot 2 & 1\cdot 1+(-\frac{1}{2})\cdot(-4)\\ 8\cdot 0+\frac{5}{2}\cdot 2 & 8\cdot 1+\frac{5}{2}\cdot(-4)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 3\\ 5 & -2\end{pmatrix} = A.$$

Näide 3: Lahendada võrrand $AXB = C$, kui

$$A = \begin{pmatrix}-1 & 3\\ 5 & -2\end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -4\end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix}0 & 4\\ -5 & -3\end{pmatrix}.$$

Lahendus : eelpooltoodud materjali põhjal avaldame X:

$$X = A^{-1}CB^{-1}.$$

Leiame maatrikseid A^{-1} ja B^{-1} (vt. p.3) : $A^{-1} = \frac{-1}{13}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \frac{1}{-2}\cdot\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$;

Siis $X = A^{-1}CB^{-1} = \frac{-1}{13}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}\cdot(\frac{1}{-2})\cdot\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} -15 & -1 \\ -5 & 17 \end{pmatrix}\cdot$

$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} -62 & -15 \\ 14 & -5 \end{pmatrix}.$

Kontrollime: $AXB = C$,

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{26}\begin{pmatrix} -62 & -15 \\ 14 & -5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 104 & 0 \\ -338 & -65 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 0 & 104 \\ -170 & -78 \end{pmatrix} =$$

$= \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} = C$.Vastus: $X = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} -62 & -15 \\ 14 & -5 \end{pmatrix}$.

Näide 4:

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}\cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix} 8\cdot 4 - 7\cdot 6 & 8\cdot 8 - 7\cdot 2 \\ -2\cdot 4 + 3\cdot 6 & -2\cdot 8 + 3\cdot 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix} -10 & 50 \\ 10 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Vastus:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Näide 5:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot X - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 8 \cdot 5 - 5 \cdot (-1) - 1 \cdot 4 \\ -4 \cdot 5 + 7 \cdot (-1) - 1 \cdot 4 \\ -4 \cdot 5 + 1 \cdot (-1) + 5 \cdot 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 41 \\ -31 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Vastus:

$$X = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 41 \\ -31 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Kontroll:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 41 \\ -31 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 \cdot 41 + 2 \cdot (-31) + 1 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 41 + 3 \cdot (-31) + 1 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 41 + 1 \cdot (-31) + 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 60 \\ -12 \\ 48 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Näide 6:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X + 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 3 & 5 \\ -8 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = -5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 3 & 5 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -10 & 15 \\ -5 & -5 \\ 10 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -16 \\ 6 & 10 \\ -16 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 1 & 5 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-8}\begin{pmatrix} -5 & -4 & 3 \\ 3 & 4 & -5 \\ -4 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -5 & -4 & 3 \\ 3 & 4 & -5 \\ -4 & -8 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 1 & 5 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -5\cdot(-6)-4\cdot 1+3\cdot(-6) & -5\cdot(-1)-4\cdot 5+3\cdot 5 \\ 3\cdot(-6)+4\cdot 1-5\cdot(-6) & 3\cdot(-1)+4\cdot 5-5\cdot 5 \\ -4\cdot(-6)-8\cdot 1+4\cdot(-6) & -4\cdot(-1)-8\cdot 5+4\cdot 5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 16 & -8 \\ -8 & -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Vastus:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Näide 7:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 24 & 14 & 11 \end{pmatrix}$$

$$X = BA^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 8 \\ 1 & 3 & -12 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 24 & 14 & 11 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} -1 & -1 & 8 \\ 1 & 3 & -12 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 24 & 14 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 8 \\ 1 & 3 & -12 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\cdot(-1)+0\cdot 1-2\cdot 0 & 2\cdot(-1)+0\cdot 3-2\cdot(-2) & 2\cdot 8+0\cdot(-12)-2\cdot 2 \\ 18\cdot(-1)+12\cdot 1+9\cdot 0 & 18\cdot(-1)+12\cdot 3+9\cdot(-2) & 18\cdot 8+12\cdot(-12)+9\cdot 2 \\ 24\cdot(-1)+14\cdot 1+11\cdot 0 & 24\cdot(-1)+14\cdot 3+11\cdot(-2) & 24\cdot 8+14\cdot(-12)+11\cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 12 \\ -6 & 0 & 18 \\ -10 & -4 & 46 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 3 & 0 & -9 \\ 5 & 2 & -23 \end{pmatrix}$$

Vastus:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 3 & 0 & -9 \\ 5 & 2 & -23 \end{pmatrix}$$

Näide 8:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 8 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 10 \\ -5 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 10 \\ -5 & 10 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 8 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -7 & 6 \\ -13 & 12 & -6 \end{pmatrix}$$

$$X = BA^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-42}\begin{pmatrix} -12 & 8 & -10 \\ 0 & -7 & -7 \\ -6 & -3 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{42}\begin{pmatrix} 12 & -8 & 10 \\ 0 & 7 & 7 \\ 6 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & -7 & 6 \\ -13 & 12 & -6 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{42}\begin{pmatrix} 12 & -8 & 10 \\ 0 & 7 & 7 \\ 6 & 3 & -9 \end{pmatrix} = \frac{1}{42}\begin{pmatrix} -6 & -7 & 6 \\ -13 & 12 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 & -8 & 10 \\ 0 & 7 & 7 \\ 6 & 3 & -9 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{42}\begin{pmatrix} -6 \cdot 12 - 7 \cdot 0 + 6 \cdot 6 & -6 \cdot (-8) - 7 \cdot 7 + 6 \cdot 3 & -6 \cdot 10 - 7 \cdot 7 + 6 \cdot (-9) \\ -13 \cdot 12 + 12 \cdot 0 - 6 \cdot 6 & -13 \cdot (-8) + 12 \cdot 7 - 6 \cdot 3 & -13 \cdot 10 + 12 \cdot 7 - 6 \cdot (-9) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{42}\begin{pmatrix} -36 & 17 & -163 \\ -192 & 170 & 8 \end{pmatrix}$$

Vastus:

$$X = \frac{1}{42}\begin{pmatrix} -36 & 17 & -163 \\ -192 & 170 & 8 \end{pmatrix}$$

Näide 9:

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Vt III tüüpi

Vastus: $X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.