Lineaarvõrrandisüsteem (LVS)
(põhimõisted)

Definitsioon. Lineaarseks võrrandisüsteemiks nimetatakse lõplikust arvust lineaarsest võrrandist koosnevat süsteemi , mille ülkuju on

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots\dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Arve a_{ij} nimetatakse võrrandisüsteemi **kordajateks**, arve $b_1 \dots b_m$ – **vabaliikmeteks**, $x_1, \dots x_n$ – **tundmatuteks** ($a_{ij}, b_i, x_j \in R, i = 1,...,m; j = 1,...,n$).

Süsteem (1) on ***m* võrrandist ja *n* tundmatust** koosnev lineaarvõrrandite süsteem.

Arve $c_1, \dots, c_n$, mis rahuldavad süsteemi (1) kõik võrrandeid, nimetatakse võrrandisüsteemi (1) **lahendiks** :

$$\begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ \quad \dots \\ x_n = c_n \end{cases} \qquad (2)$$

LVS (1) kordajatest moodustatud maatriksit nimetatakse **süsteemi maatriksiks** :

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Maatriksi A täiendamisel vabaliikmete veeruga tekkinud maatriksit nimetatakse **süsteemi laiendatud maatriksiks:**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{pmatrix}.$$

LVS (1) saab kirja panna **maatrikskujul:**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Näide

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Definitsioon. LVS, millel vabaliikmete veerg koosneb ainult nullidest $b_j = 0$ ($j = 1,\ldots,m$) nimetatakse **homogeenseks.**

NB!

Lineaarvõrrandisüsteemil (1) võib:

a) leiduda ainult **üks lahend**, kui $m = n$ ja $detA \neq 0$;

b) **lahend puududa**, kui võrrandid on vastuolulised (vastuoliline võrrand on võrrand, millel lahend puudub);

c) *** leiduda **lõpmata palju lahendeid**, kui tundmatute arv on suurem võrrandite arvust ($m < n$) või $detA = 0$. Viimasel juhul saab süsteemi (1) jaoks välja kirjutada **üldlahendi**, mis sõltub vabalt valitavatest konstantidest:

$$\begin{cases} x_1 = x_1(C_1, C_2, \ldots, C_k) \\ x_2 = x_2(C_1, C_2, \ldots, C_k) \\ \ldots \\ x_n = x_n(C_1, C_2, \ldots, C_k) \end{cases},$$

kus C_1, C_2, ..., $C_k \in$ R.

Vabalt valitavate konstantide arv k on määratud tundmatute arvu ja sõltumatute võrrandite arvu vahega.

Süsteemi (1) **erilahendiks** nimetatakse süsteemi lahendit, mis saadakse üldlahendist konstantidele C_1, C_2, ..., C_k arvuliste väärtuste andmisel.

Lahenduvusega seotud mõisted:

a) Süsteemi nimetatkse ***kooskõlaliseks,*** kui tal leidub vähemalt üks lahend.

b) Öeldakse, et süsteem, ***on määratud***, kui tal leidub parasti üks lahend.

c) Süsteemi nimetatakse ***vasturääkivaks***, kui tal puuduvad lahendid.