Lineaarvõrrandisüsteemi lahendamine maatriksvõrrandi abil

(ehk *pöördmaatriksi abil* ehk *maatrikskujul* ehk *maartiksmeetod*)

Lineaarvõrrandisüsteemi (LVS) saab lahendada pöördmaatriksi abil, kui

1) võrrandisüsteemis tundmatute arv võrdub võrrandite arvuga;
2) süsteemile vastaval maatriksil leidub pöördmaatriks.

Vaatleme lineaarvõrrandisüsteemi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{1}$$

kus LVS-le vastav maatriks A on regulaarne ehk $detA \neq 0$.

Esitame lineaarvõrrandite süsteemi maatrikskujul

$$AX = B,$$

kus

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ ja } X = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Tähistused:

A – lineaarvõrrandite süsteemi maatriks
X – tundmatute maatriks
B – vabaliikmete maatriks.

LVS-i (1) maatrikskujust $AX = B$ avaldub X järgmiselt:

$$\boxed{\boldsymbol{X = A^{-1} \cdot B}}.$$

Oleme saanud valemi, kuidas lahendada LVS-i pöördmaatriksi abil.

Kokkuvõte:
Selleks, et leida LVS (1) lahendid pöördmaatriksi abil, tuleb lahendada maatriksvõrrand

$AX = B$,
eeskirjaga

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Järgmisena laendame LVS maatrikskujul.

Näide 1. Lahendada võrrandisüsteem maarikskujul

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 14 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Lahendus.

a) kirjutame välja LVS vastava maatriksi $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ ja leiame selle maatriksi determinandi väärtuse

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7$$

kuna $detA \neq 0$, siis saame leida LVS-i lahendid pöördmaatriksi abil.

b) leiame maatriksi A pöördmaatriksi A^{-1}.

Näiteks leiame pöördmaatriksi kasutades adjungeeritud maatriksi $\tilde{A}$. Selleks leiame maatriksi A elementidele vastavad alammiinorid

$$A_{11} = -2$$
$$A_{12} = -1$$
$$A_{21} = -5$$
$$A_{22} = 1$$

ja kirjutame välja adjungeeritud maatriksi

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Seega $A^{-1} = \frac{1}{det} \cdot \tilde{A} = -\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$

c) Teades LVS-i vabaliikmete maatriksi $B = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix}$ ja maatriksi A pöördmaatriksit A^{-1}, saame

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vastus: $x_1 = 4; x_2 = 2.$

Näide 2. Lahendada võrrandisüsteem maarikskujul

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 2. \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 8 \end{cases}.$$

Lahendus.

Süsteemi maatriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Leiame A^{-1}:

$D_A = 18$

$$A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 5 & 8 & -1 \\ -4 & -10 & 8 \\ 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$X = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 5 & 8 & -1 \\ -4 & -10 & 8 \\ 7 & 4 & -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 18 \\ 36 \\ -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Vastus: $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = -1.$

Näide 3. Lahendada võrrandisüsteem maarikskujul

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 7 \\ 2x_1 + x_2 = 9 \end{cases}$$

Lahendus.

$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 31 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 31 \end{pmatrix}$$

Vastus: $x_1 = -11$, $x_2 = 31$

Näide 4. Lahendada võrrandisüsteem maarikskujul

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

Lahendus.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Leiame A pöördmaatriksi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 3 -$$
$$-3 \cdot (-1) \cdot 1 - (-1) \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 2 = -4 \neq 0$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2$$
$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$$
$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5$$
$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$
$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$
$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$
$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$$\widetilde{A} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

Vastus: $x_1 = -1; x_2 = 1; x_3 = 3.$

Näide 5. Lahendada võrrandisüsteem maarikskujul

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Lahendus.

$detA = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 5 & 7 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0.$ Järelikult antud süsteemi ei ole võimalik lahendada maatriksmeetodiga.

Vastus: Süsteemi ei ole võimalik lahendada maatriksmeetodiga