Crameri valemid ehk lineaarse võrrandisüsteemi lahendamine determinantide abil ehk Crameri peajuht

Selles punktis anname valemi teatavat tüüpi lineaarvõrrandisüsteemi lahendamiseks. Täidetud peab olema kaks tingimust:

- lineaarvõrrandisüsteemi **võrrandite arv** peab olema võrdne **tundmatute arvuga**
- tema **maatriks** peab olema **regulaarne** ($detA \neq 0$)

Oeldut arvestades, on lineaarvõrrandisüsteem kujuga

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Tema maatriks

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Crameri valemid ehk lineaarse võrrandisüsteemi lahendamine determinantide abil:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta},$$

kus

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

kus Δ või D on süsteemi maatriksi determinant ehk $detA$ ja Δ_{x_i} või D_i on determinant, **on saadud maatriksi *A* *i*-nda veeru asendamisel vabaliikmete veeruga:**

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},\ \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots,\ \Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix}.$$

Crameri peajuhu korral lineaarvõrrandisüsteemi lahendamiseks eeltöödud valemite kasutamist nimetatakse **Crameri reegli** kasutamiseks.

Näide 1.

Lahendada LVS $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1 \\ 4x_1 + x_2 = 9. \end{cases}$ Crameri valemite abil.

Lahendus: Süsteemi determinant $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2+12=14$;

$$\det x_1 = D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = 1-(-27)=28, \quad \det x_2 = D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 18-4=14.$$

Siis

$$x_1 = \frac{\det x_1}{\det A} = \frac{D_1}{D} = \frac{28}{14} = 2,$$
$$x_2 = \frac{\det x_2}{\det A} = \frac{D_2}{D} = \frac{14}{14} = 1.$$

Vastus: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

Näide 2.

Crameri valemite abil lahendada võrrandisüsteem:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}.$$

Lahendus.

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

Leiame esimesena süsteemi determinadi D. Ning seejärel otsitavate muutujatele vastavad determinandid, arvestades, et vastava muutuja kordajate veerg on asendatud vabaliikmete veeruga.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 4 \end{vmatrix} = -6;\ D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 9;\ D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -3;\ D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = -12,$$

$$x_1 = \frac{9}{-6} = -1{,}5;\ x_2 = \frac{-3}{-6} = 0{,}5;\ x_3 = \frac{-12}{-6} = 2.$$

Vastus: $x_1 = -1{,}5$; $x_2 = 0{,}5$; $x_3=2$

Näide 3.

Crameri valemite abil lahendada võrrandisüsteem:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 2 \end{cases}.$$

Lahendus. Leiame süsteemi determinandi

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 2+6+12+1-16+9 =$$
$$= 14 \neq 0.$$

Nüüd leiame ka tundmatute determinandid

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 14, \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -14.$$

Crameri valemete järgi leiame:

$$x_1 = \frac{14}{14} = 1, \qquad x_2 = \frac{0}{14} = 0, \qquad x_3 = \frac{-14}{14} = -1.$$

Vastus: $x_1 = 1$; $x_2 = 0$; $x_3 = -1$.

Näide 4.

Crameri valemite abil lahendada võrrandisüsteem:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 = 8 \end{cases}.$$

Lahendus.

Leiame süsteemi determinandi

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -6 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 18 - 4 + 3 - 12 - 0 = -31.$$

Nüüd leiame ka tundmatute determinandid

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -6 \\ 8 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 48 + 2 + 8 - 24 = -62.$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -6 \\ 3 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 16 - 36 + 3 + 48 + 0 =$$

$$= 31.$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 8 \end{vmatrix} = -8 - 3 - 8 + 6 - 2 - 16 =$$

$$= -31.$$

Crameri valemete järgi leiame:

$$x_1 = \frac{-62}{-31} = 2, \quad x_2 = \frac{31}{-31} = -1, \quad x_3 = \frac{-31}{-31} = 1.$$

Vastus: $x_1 = 2$; $x_2 = -1$; $x_3 = 1$.

Märkus:
Juhul kui

1)

$^{*}\ \Delta = 0,$

$^{**}\ \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \ldots = \Delta_{x_n} = 0,$

süsteemil on **lõpmata palju lahendeid** (uuritatakse Gaussi –Jordan meetodiga);

2)

$^{*}\ \Delta = 0,$

$^{**}\ \Delta_{x_1} \neq 0,\ \Delta_{x_2} \neq 0, \ldots ,\Delta_{x_n} \neq 0.$

süsteemil **puuduvad lahendid**.

Näide 5.

Crameri valemite abil lahendada võrrandisüsteem:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 9 \\ 3x - 5y + z = -4 \\ 4x - 7y + z = 5 \end{cases}$$

Lahendus.

Leiame süsteemi determinandi

!!!

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 4 & -7 & 1 \end{vmatrix} = -10 - 4 - 63 + 60 + 14 + 3 = 0.$$

Süsteemi determiant on võrdne nulliga, seega antud süseemil puuduvad lahendid või lahendeid on lõpmata palju. Selle täpsustamiseks leiame ka tundmatute determinandid:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 9 & -1 & 3 \\ -4 & -5 & 1 \\ 5 & -7 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= -45 - 5 + 84 + 75 - 4 + 63 = 168.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= -8 + 36 + 45 + 48 - 27 - 10 = 84.$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 9 \\ 3 & -5 & -4 \\ 4 & -7 & 5 \end{vmatrix} =$$
$$= -50 + 16 - 189 + 180 - 56 + 15 = -84.$$

Need leitud determinandid ei võrdu nulliga, seega algsel **süsteemil lahendid puuduvad.**