Gaussi meetod

Enne Gaussi meetodi vaatlemist, toome sisse mõned vajalikud mõisted.

I Maatriksi elemetaarteisendused. Vaatleme $(m \times n)$- maatriksit, ning $c \in R$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Kasutades ridade (veergude elementaatreisendusi), saame esialgse maatriksiga **ekvivalentse maatriksi**. Ekvivalentseks olemist tähistatakse sümboliga ~. Näiteks $A \sim B$ tähendab, et maatriks A on **ekvivalentne ehk samaväärne** maatriksiga B.

***Maatriksi elementaarteisendused*:**

a) maatriksi rea (või veeru) korrutamine nullist erineva arvuga;
b) maatriksi kahe rea (või veeru) ära vahetamine;
c) maatriksi reale (või veerule) mingi arvuga korrutatud teise rea (või vastavalt – veeru liitmine);
d) nullrea (või veeru) ärajatmine.

Näide. Vaatleme maatriksiga $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ ridade elementaarteisendusi:

a) korrutame maatriksi esimese rea läbi arvuga 5

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -15 & -10 \\ -4 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

b) vahetame maatriksi teise ja kolmanda rea

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

c) liidame maatriksi kolmandale reale neljakordse esimese rea

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \\ 9 & 13 \end{pmatrix}$$

d) korrutame maatriksi teise rea läbi arvuga (-1) ning vahetame ära maatriksi esimese ja kolmanda rea

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

e) liidame maatriksi teisele reale (-3)-kordse kolmanda rea ning korrutame maatriksi esimese rea läbi arvuga 4.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 5 & -14 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

II Juhtelement. Maatriksi rea juhtelemendiks nimetatakse selle rea (vasakult) esimest nullist erinevat elementi.

III Treppkujuline maatriks. Ütleme, et maatriks on treppkujuline ehk treppmaatriks, kui

1) read, mis koosnevad nullidest, on maatriksi põhjas (all);
2) mistahes rea juhtelement asetseb rangelt vasakul temale järgneva rea juhtelemendist (kui leidub).

Gaussi meetod

Gaussi meetodi idee:

Gaussi meetod on LVS-ide **ökonoomne** lahendusmeetod maatriksite elementaarteisenduste abil. Meetodi aluseks on tähelepanek, et LVS-i elementaarteisemdusi võib sooritada maatrikskujul, kasutades LVS-i laiendatud maatriksi **ridade** elementaarteisendusi. LVS teisendatakse elementaarteisenduste abil ekvivalentsele **treppkujule.**

Gaussi meetodi sammud:

1. Olgu antud LVS

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

2. Koostame süsteemile vastava laiendatud maatriksi:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

3. Teatud reeglite järgi (teatud reeglite all mõistame maatriksite elementaarteisendusi ridadega) teisendatakse maatriks järgmisele kujule (**treppkujule**):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

Gaussi meetodiga lahendamisel laiendatud maatriksis lubatud:

a) maatriksi kahe rea vastastikune ümbervahetamine;

b) rea korrutamine nullist erineva arvuga;

c) reale liitmine mingi teine rida kordne arvuga;

d) "nullrea" (rida, kus kõik kordajad on võrdsed nulliga, ka vabaliige) ära jätmine;

e) tekkinud võrdsetest (või võrdelistest) ridadest võib jääda ainult üks rida, teised on lubatud ära jätta.

Nende teisenduste tulemusena saadakse esialgse süsteemiga ekvivalentne süsteem.

4. Tundmatute leidmiseks kirjutatakse vastava süsteemi välja

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad x_n = b_n \end{cases}$$

Viimasest võrrandist saadakse x_n , kui asnedame selle eelnisesse võrrandisse saame x_{n-1} jne.

Järgnevalt vaatame näiteid Gaussi meetodist. Vaatleme 5 näidet, kui süsteemil on 1 lahend.

Näide 1.

Lahendame LVS Gaussi meetodiga (vaatleme lahenduskäiku väga põhjalikult):

$$\begin{cases} 3x+2y-5z=-1 \\ 2x-y+3z=13 \\ x+2y-z=9 \end{cases}$$

Paneme kirja süsteemi laiendatud maatriksi:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

Meie eesmärk viia laiendatud maatriks treppkujule. Joostes ette ütleme, et tulemusks on maatriks:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Aga kuidas saada sellise maatriksi? Millest alustame?

Algul vaatame ülemist vaskut arvu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

Selleks, et arvutused oleksid mugavad sinna on mõistlik saada arvu „1“ (sobib ka „-1“).

Selles ülesandes meil on arv „1“ tätsa olemas – esimese tulba viimane element. Vahetame esimese ja kolmanda rea omavahel (see on lubatud teisendus, sellest LVS lahend ei muutu, see on sama hea, kui meie vahetame süsteemis 2 võrrandit omavahel ära). Saame

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Nüüd esimene rida jääb muutmatuks lahenduse lõpuni.

Nüüd on kergem, „1“ olemas ülemises vasaknurgas. Nüüd peame „korraladama“ nullid märgitud kohtadesse:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Vaatme algul tesdt rida (2, -1, 3, 13). Soovime selle rea esimeseks elemndiks „0“. Sellks korrutame esimest rida arvuga „-2“ ning liidame teisele reale. Peast või mustandil korrutame esimest rida -2-ga.

2: (–2, –4, 2, –18).

Ning jällegi peast või mustandil liidame

$$\begin{array}{cccc} 0 & -5 & 5 & -5 \\ \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ -2 & -4 & 2 & -18 \\ + & + & + & + \\ 2 & -1 & 3 & 13 \end{array}$$

Tulemuse kirjutame teise rea kohale:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

NB! Rida mida korrutasime ei muutu, alati muutub rida millele liidame.

Analoogiliselt toimime ka kolamnda reaga (3, 2, –5, –1). Selleks, et saada esimeseks elemendiks „0“, peame esimest rida korrutada -3-ga ning liita kolmandale. Peast või mustandil korrutame I rida -3-ga

–3: (–3, –6, 3, –27).

Ja kolmandale reale liidame I rida, mis on -3-ga korrutatud.

$$\begin{array}{cccc} 0 & -4 & -2 & -28 \\ \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ -3 & -6 & 3 & -27 \\ + & + & + & + \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}$$

Tulemuse paneme kirja kolmanda rea kohale:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

Praktikas neid tehteid tehakse tavaliselt peast ja kirjutatakse ühe sammuna:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

Skemaatiliselt võib elementide „ilmumust“ esitada järgnevalt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ * & * & * & * \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & * & * & * \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & * & * \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & * \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

Nüüd peame saama „1“ nö „järgmisel astmel“:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

Selles ülesandes seda on väga lihtne teha, jagame teise rea kõik elemndid arvuga „-5“ läbi (seda on mugav teha, sest teise rea kõik elemndid jaguvad 5-ga). Samuti jagame kolmanda rea -2-ga (sest mida väikemad on arvud, seda lihtsam lahendada). Saame

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right)$$

Viimasel etapil peame saama nulli ka kolmandas reas:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right)$$

Selleks teist rida korrutame -2-ga ning liidame kolmandale reale:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Jagasime kolmanda rea elemendid 3-ga läbi.

Kirjutame süsteemi ümber, arvestades uute kordajatega:

$$\begin{cases} x+2y-z=9 \\ \quad y-z=1 \\ \qquad z=4 \end{cases}$$

Sooritame nüüd Gaussi tagasikäiku. Lähme „alt ülesse“.

Kolmandas võrrandis meil on juba valmistulemus:

$z=4$

Vaatame teist võrrandidt:

$y-z=1$

Kuna z väärtust on juba teada, siis

$y-4=1$
$y=5$

Lõpus ka esimene võrrand:

$x+2y-z=9$.

Siin meie teame nii z kui ka y väärtust. Asendame.

$x+2\cdot 5-4=9$
$x+6=9$
$x=3$

Vastus: $x=3, y=5, z=4$

Näide 2.

Lahendame LVS Gaussi meetodiga:

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x-y+2z=6 \\ x+y+5z=-1 \end{cases}$$

Kirjutame süsteemi laiendatud maatriksi välja. Eesmärk teisendada nn treppkijuks.

Järnevalt on toodud maatriksi elemntaarteisendused, mille tagajärjel maatriks sai treppkuju. Vastavad elemntaarteisendused on kirjeldatud allpool.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 4 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 14 & -14 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Sooritatud elemnetaarteisendused*:*

(1) Esimene rida oli korrutatud -2-ga ning liidetud teisele reale. Seejärel esimene rida oli korrutatud -1-ga ning liidetud kolmandale reale.

(2) Teist rida korrutatud -1-ga. Teisne ja kolmas rida oli omavahel vahetatud. NB! „treppidel" meile sobib nii arv 1 kui ka -1.

(3) Teist rida korrutasime 5-ga ning liitsime kolmandale reale.

(4) Teine rida oli korrutatud -1-ga. Kolmas rida jagatud 14-ga.

Tagasikäik:

$$z=-1$$
$$y-2z=2 \Rightarrow y+2=2 \Rightarrow y=0$$
$$x+2y+3z=1 \Rightarrow x+0-3=1 \Rightarrow x=4$$

Vastus:

$x=4, y=0, z=-1$.

Näide 3.

Lahendame LVS Gaussi meetodiga.

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2-x_3=1 \\ 5x_1+3x_2-2x_3=2 \\ 3x_1+2x_2-3x_3=0 \end{cases}$$

Kirjutame süsteemi laiendatud maatriksi välja ning viime elemntaarteisendustega treppkujule.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Vaatame vasaknurga elementi. Soovime sinna arvu 1 või -1. Probleem on selles, et esimeses veerus neid arve ei ole ning ridade ümbervahetusega see probleem ei oleks lahendatud. Sellistel juhtudel peame saama arvu 1 elementaarteisendustega. Tavaliselt seda saab teha mitmel viisil. Toimime näiteks nii.

(1) Teist rida korrutame -1-ga ning liidame esimesele reale. Seejuures teine rida on muutmata:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Nüüd saime esimeseks elemndiks -1, see sobib mugavaks arvutuseks. Kui on soov saada 1, siis võib esimest rida korrutada arvuga -1.

Edasi jätkame juba eespool näidetes kirjeldatud skeemiga (teisendused on kirjeldatud allpool):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(5)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

(2) Esimestt rida korrutame -5-ga ning liidame teisele reale. Esimest rida korrutame 3-ga ning liidame kolmandale reale.

(3) Esimest rida „ilu pärast“ korrutame -1-ga. Samuti korrutasime ka kolmandat rida -1-ga ning panime teise rea kohale. Selliselt saime teisele „trepile“ vajaliku 1.

(4) Teisne rida korrutatud 2-ga ning liidetud kolmandale reale.

(5) kolmas rida jagatud 3-ga.

Märkus: saime „ilusa“ kolmanda rea, kust edasi sooritame Gaussi tagasikäiku. Juhul kui see rida on „inetu“ toimime sama põhimõttega. Näiteks kui kolmas rida oleks

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 11 & 23 \end{array}\right),$$

siis x_3 jaoks saame

$$11x_3 = 23 \Rightarrow x_3 = \frac{23}{11}.$$

Sooritame Gaussi tagasikäiku:

$$x_3 = 1$$
$$x_2 = 3$$
$$x_1 + x_2 - x_3 = 1 \Rightarrow x_1 + 3 - 1 = 1 \Rightarrow x_1 = -1$$

Vastus:

$$x_1 = -1, x_2 = 3, x_3 = 1$$

Näide 4.

Lahendame LVS Gaussi meetodiga

$$\begin{cases} 8x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 18 \\ -7x_1 - 4x_2 - 4x_3 = -11 \\ -6x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -15 \end{cases}$$

Kirjutame süsteemi laiendatud maatriksi välja ning viime elemntaarteisendustega treppkujule.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 7 & 3 & 18 \\ -7 & -4 & -4 & -11 \\ -6 & 5 & -4 & -15 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 7 \\ -7 & -4 & -4 & -11 \\ -6 & 5 & -4 & -15 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 17 & -11 & 38 \\ 0 & 23 & -10 & 27 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 17 & -11 & 38 \\ 0 & 6 & 1 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & -14 & 71 \\ 0 & 6 & 1 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow{(5)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & -14 & 71 \\ 0 & 0 & -83 & 415 \end{array}\right) \xrightarrow{(6)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 14 & -71 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

Sooritatud elemntaarteisendused:

(1) Soovime esimseks vasaknurga elemndiks kas 1 või -1. Sellks korrutame teist rida 1-ga ning liidame esimesele. Teine rida on ümberkirjutatud.

(2) Esimene rida korrutatud 7-ga ning liidetud teisele reale. Esimene rida korrutatud 6-ga ning liidetud kolmandale reale.

Edasi olukord tundub keeruliseks, sest näeme arve 17 ja 23, aga soov on arv 1. Järgmised teisendused (3) ja (4) on suunatud selle 1 saamisele.

(3) teine rida korrutatud -1-ga ning liidetud kolmandale reale

(4) Kolmas rida korrutatud -3-ga ning liidetud teisele reale.

Saime arv 1 „teisel treppil“.

(5) Teine rida on korrutatud 6-ga ning liidetud kolmandale reale.

(6) teine rida korrutatud -1-ga. Kolmas rida on korrutatud -83-ga.

Gaussi tagasikäik:

$$x_3 = -5$$
$$x_2 + 14x_3 = -71 \Rightarrow x_2 - 70 = -71 \Rightarrow x_2 = -1$$
$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \Rightarrow x_1 - 3 + 5 = 7 \Rightarrow x_1 = 5$$

Vastus:

$$x_1 = 5,\ x_2 = -1,\ x_3 = -5$$

Näide 5.

Lahendame LVS Gaussi meetodiga

$$\begin{cases} 2x + 5y + 4z + t = 20 \\ x + 3y + 2z + t = 11 \\ 2x + 10y + 9z + 7t = 40 \\ 3x + 8y + 9z + 2t = 37 \end{cases}$$

Kirjutame süsteemi laiendatud maatriksi välja ning viime elemntaarteisendustega treppkujule. Sooritatud elementaarteisendused on kirjeldatud allpool.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 4 & 1 & 20 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 2 & 10 & 9 & 7 & 40 \\ 3 & 8 & 9 & 2 & 37 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 20 \\ 2 & 10 & 9 & 7 & 40 \\ 3 & 8 & 9 & 2 & 37 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 5 & 18 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{(5)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

(1) Esimene ja teine rida on ära vahetatud.
(2) Esimene rida on korrutatud -2-ga ning liidetud teisele reale. Esimene rida on korrutatud -2-ga ning liidetud kolmandale. Esimene rida on korrutatud -3-ga ning liidetud neljandale reale.
(3) Teine rida on korrutatud 4-ga ning liidetud kolmandale reale. Teine rda on korrutatud -1-ga ning liidetud neljandale reale.

(4) Teine rida on korrutatid -1-ga. Neljas rida on 3-ga jagatud ning seejärel paigutatud kolmanda rea kohale.

(5) Kolmas rida on korrutatud -5-ga ning liidetud neljandale reale.

Tagasikäik:

$t = 0$

$z = 2$
$y + t = 2 \Rightarrow y = 2$
$x + 3y + 2z + t = 11 \Rightarrow x + 6 + 4 + 0 = 11 \Rightarrow x = 1$

Vastus:

$x = 1, y = 2, z = 2, t = 0$