GAUSSI MEETOD.

Enne näidet tuletame meelde (vt faili „Linearvõrrandisüsteem (põhimõisted)“), et

lineaarvõrrandisüsteemil võib leiduda **lõpmata palju lahendeid**, kui tundmatute arv on suurem võrrandite arvust ($m < n$) või $detA = 0$. Viimasel juhul saab süsteemi jaoks välja kirjutada **üldlahendi**, mis sõltub vabalt valitavatest konstantidest:

$$\begin{cases} x_1 = x_1(C_1, C_2, \dots, C_k) \\ x_2 = x_2(C_1, C_2, \dots, C_k) \\ \quad\dots \\ x_n = x_n(C_1, C_2, \dots, C_k) \end{cases},$$

kus $C_1, C_2, \dots, C_k \in$ R.

Vabalt valitavate konstantide arv k on määratud tundmatute arvu ja sõltumatute võrrandite arvu vahega.

Süsteemi **erilahendiks** nimetatakse süsteemi lahendit, mis saadakse üldlahendist konstantidele $C_1, C_2, \dots, C_k$ arvuliste väärtuste andmisel.

Näide. Lahendada süsteem Gaussi meetodiga

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 4x_3 = -11 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ -3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}.$$

Lahendus. Kirjutame süsteemi laiendatud maatriksi välaj ning elementaarteisenduste abil viime maatriksi trepikujuliseks.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 & \vdots & -11 \\ 1 & 2 & 1 & \vdots & 5 \\ -3 & -1 & 2 & \vdots & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \textit{toometeise rea} \\ \textit{esimeseks} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 5 \\ 5 & 1 & -4 & \vdots & -11 \\ -3 & -1 & 2 & \vdots & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \textit{nullitame esimese} \\ \textit{veeru elemente} \\ \textit{(va juhtelement)} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 5 \\ 0 & -9 & -9 & \vdots & -36 \\ 0 & 5 & 5 & \vdots & 20 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ :(-9) \\ :5 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Süsteemi kirja panemisel mull-rida võib mitte kirja panna. Seega saame järgmise süsteemi:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ \qquad\; x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Tunsmatute (muutujate) arv on 3. Tundmatud on x_1, x_2, x_3. Võrrandite arv on 2. Kui on saadud olukord, kus muutujate arv on suurem kui võrrandite arv, siis antud süsteemil on lõpmata palju lahendeid. Valime nö **vabamuutujad.** Nende arv võrdub:

$$3 - 2 = 1.$$

Vabamuutujaks valime sellise mutuja, mis ei olnud kunagi juhtelemendi rollis ehk see on x_3.

Kuna osutus, et süsteemil on lõpmata palju lehendeid, siis kirjutame selle **üldlahend** välja. Süsteemi üldlahendi väljakirjutamiseks tähistame

$$x_3 = C,$$

kus C on vabalt valitud konstant ($C \in$ R.)

Seega

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + C = 5 \\ x_2 + C = 4 \end{cases}.$$

Ning süsteemi üldlahend on

$$\begin{cases} x_1 = -3 + C \\ x_2 = 4 - C \\ x_3 = C \end{cases}$$

Saadud üldlahendi jaoks peab teostama kontrolli, asendades saadud tundmatud algsüsteemisse.

Kirjutame ka välja ühe **erilahendi**, selle saame siis kui anname muutujale x_3 suvalise väärtuse nt olgu see 2.

Sellise valikuga süsteemi erilahend on

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$