Gaussi – Jordami meetod

Kui Gaussi meetodit jätkata selliselt , et teisendada maatriksi veerud ühikvektoreiks (st et igas veerus on 1 nullist erinev element), siis öeldakse et lineaarvõrrandi süsteem on lahendatud Gauss-Jordani (Wilhelm Jordan (1842-1899) saksa insener) meetodiga. Meetodite põhierinevus: Gaussi meetodis teisendatakse laiendatud maatriks treppikujuliseks, Gaussi – Jordani meetodis nö ühikkujuks (vt joonist)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_1^{(n)} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & b_2^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & b_n^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Näide 1: Lahendada LVS $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -12 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$ Gauss- Jordani meetodiga.

Lahendus:

Kirjutame välja süsteemi laiendatud maatriksi:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & \vdots & -12 \\ 2 & -3 & 1 & \vdots & -1 \\ 1 & 2 & -1 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} +II\cdot 3 \\ \\ +II \end{matrix} \begin{matrix} \textit{valime juhtelemendiks} \\ \textit{"1", mis asub kolmandas} \\ \textit{veerus, nullitame veergu} \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 7 & -11 & 0 & \vdots & -15 \\ 2 & -3 & 1 & \vdots & -1 \\ 3 & -1 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot(-1) \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -11 & 0 & \vdots & -15 \\ 2 & -3 & 1 & \vdots & -1 \\ -3 & 1 & 0 & \vdots & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} +III\cdot 11 \\ +III\cdot 3 \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \textit{valime juhtelemen -} \\ \textit{diks "1", mis asub tei -} \\ \textit{ses veerus; nullitame} \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -26 & 0 & 0 & \vdots & -26 \\ -7 & 0 & 1 & \vdots & -4 \\ -3 & 1 & 0 & \vdots & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \div(-26) \\ \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ -7 & 0 & 1 & \vdots & -4 \\ -3 & 1 & 0 & \vdots & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +I\cdot 7 \\ +I\cdot 3 \end{matrix} \begin{matrix} \textit{valime juhtelemendiks "1",} \\ \textit{mis asub esimeses veerus} \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 2 \end{pmatrix}$$

Kuna kõikidest ridadest on juhtelemendid valitud, siis kirjutame välja maatriksile vastava võrrandite süsteemi:

$$\begin{cases} 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = 1 \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 1\cdot x_3 = 3, \\ 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = 2 \end{cases}$$

seega süsteemil on ühene lahend : $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

Kontroll: $\begin{cases} 1 - 2\cdot 2 - 3\cdot 3 = -12 \\ 2\cdot 1 - 3\cdot 2 + 3 = -1 \\ 1 + 2\cdot 2 - 3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -12 = -12 \\ -1 = -1 \\ 2 = 2 \end{cases}$.

Vastus: : $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

Näide 2: Lahendada LVS $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$ Gauss- Jordani meetodiga.

Lahendus: Kirjutame välja süsteemi laiendatud maatriksi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & \vdots & -1 \\ 1 & 2 & -2 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 2 & 1 & -3 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -I \\ -I \\ +II\cdot(-2) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \textit{juhtelemendiks on} \\ \textit{valitud "1", mis asub} \\ \textit{esimeses reas ja esi-} \\ \textit{meses veerus; nullitame} \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & \vdots & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 4 & \vdots & 4 \\ 0 & -1 & 3 & \vdots & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \div 4 \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & \vdots & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & 3 & \vdots & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} -II \\ \\ \\ +II \end{matrix} \quad \begin{matrix} \textit{juhtelemendiks on} \\ \textit{valitud "1", mis asub} \\ \textit{teises reas ja teises} \\ \textit{veerus; nullitame} \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & \vdots & -3 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 4 & \vdots & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \div 4 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & \vdots & -3 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \begin{matrix} +IV\cdot 4 \\ -IV \\ -IV \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 5/4 \end{pmatrix}$$

valime juhtelemendina "1",
mis asub kolmandas reas ja
kolmandas veerus; nullitame

Kuna kolmandas reas on kõik elemendid peale viimast (vaba liige) nullid., ehk et kolmandale reale vastab võrrand $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = -\frac{1}{4}$, tekib vastuoluline võrdus $0 = -\frac{1}{4}$, seega süsteemil lahend puudub.

Vastus: lahend puudub

*** Näide juhtumist, kus lahend ei ole üheselt määratud, ehk lõpmata palju lehendeid (üldlahend)

Näide 3: Lahendada LVS $\begin{cases} 3x_1+2x_2-5x_3+4x_4=2 \\ 6x_1+4x_2-4x_3+3x_4=3 \\ 9x_1+6x_2-3x_3+2x_4=4. \end{cases}$

Lahendus:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -5 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & -4 & 3 & 3 \\ 9 & 6 & -3 & 2 & 4 \end{array}\right) \div(-3) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -5 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & -4 & 3 & 3 \\ -3 & -2 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{array}\right) \begin{array}{l} +III\cdot 5 \\ +III\cdot 4 \end{array} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -12 & -8 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{14}{3} \\ -6 & -4 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \\ -3 & -2 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{array}\right) \div 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -6 & -4 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \\ -6 & -4 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \\ -3 & -2 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{array}\right)$$

esimene ja teine rida on võrdsed, piisab kui kuirjutame ainult ühte neist

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -6 & -4 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \\ -3 & -2 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{array}\right) \div(-4) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \frac{3}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{12} & \frac{7}{12} \\ -3 & -2 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{array}\right) + I\cdot 2$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \frac{3}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{12} & \frac{7}{12} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \end{array}\right)$$

Kirjutame välja maatriksile vastava võrrandite süsteemi:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x_1+x_2-\frac{1}{12}x_4=\frac{7}{12} \\ x_3-\frac{5}{6}x_4=-\frac{1}{6} \end{cases},$$

avaldame juhtelementidele (x_2, x_3) vastavad tundmatud:

$$\begin{cases} x_2=\frac{7}{12}-\frac{3}{2}x_1+\frac{1}{12}x_4 \\ x_3=-\frac{1}{6}+\frac{5}{6}x_4 \end{cases},$$

tähistades $x_1 = C_1$, $x_4 = C_2$, saame süsteemi <u>üldlahendiks</u>:

$$\begin{cases} x_1=C_1 \\ x_2=\frac{7}{12}-\frac{3}{2}C_1+\frac{1}{12}C_2 \\ x_3=-\frac{1}{6}+\frac{5}{6}C_2 \\ x_4=C_2 \end{cases}$$

Saab kontrollida ka üldlahendit asendades saadud lahendid algsüsteemi, aga mõistlikum on

Kontrollida mingit erilahendit. Seega kirjutame välja kas või ühe erilahendi:

$$\begin{cases} x_1 = C_1 = 1 \\ x_4 = C_2 = -1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

Kontroll:

3 · 1 + 2 · (-1) – 5 · (-1) + 4 · (-1) = 2,

3 – 2 + 5 – 4 = 2,

2 = 2;

6 · 1 + 4 · (-1) - 4 · (-1) + 3 ·(-1) = 3,

6 – 4 + 4 – 3 = 3,

3 = 3;

9 · 1 + 6 · (-1) - 3 · (-1) + 2 · (-1) = 4,

9 – 6 + 3 -2 = 4,

4 = 4.