Gaussi – Jordani meetod

Näide juhtumist, kus lahend ei ole üheselt määratud, ehk lõpmata palju lahendeid (üldlahend).

Näide. Lahendame LVS Gauss – Jordani meetodiga

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$$

Lahendus. Kirjutame süsteemi laiendatud maatriksi välja

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 & \vdots & 2 \\ 6 & 4 & -4 & 3 & \vdots & 3 \\ 9 & 6 & -3 & 2 & \vdots & 4 \end{pmatrix}$$

Lahendades valime juhtelemente paediagonaalil ning ei teisenda lahenduskäigu jooksul peaelemente „1“- ks.

Esimeseks juhtelemendiks võtame arvu „3“ (märgitud punasega). Nullitame esimese veeru elemndid ära. Selleks kirjutame esimese rea ümber (see on rida, mis sisaldab juhtelementi), seejärel

- korrutame esimest rida „-2“- ga ning liidame teisele reale (tulemuse kirjutame teise rea kohale);
- korrutame esimest rida „-3“- ga ning liidame kolmandale reale (tulemuse kirjutame kolmanda rea kohale);

Saame

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 & \vdots & 2 \\ 6 & 4 & -4 & 3 & \vdots & 3 \\ 9 & 6 & -3 & 2 & \vdots & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & \vdots & -1 \end{pmatrix}$$

Teisest veerust juhtelementi ei leidu, sest arv „2“ on esimesest veerust, aga esimene rida oli juba kasutusel (sellest oli võrtud esimene juhtelement „3“).

Komnada veeru juhtelemendiks võtame arvu „6“ (märgitud punasega). Nullitame kolmanda veeru elemendid ära. Selleks kirjutame teise rea ümber (see on rida, mis sisaldab juhtelementi), seejärel

- korrutame esimest rida „-6“- ga ja teist rida „5“ ning liidame tulemused kokku (tulemuse kirjutame esimese rea kohale);
- korrutame teist rida „-1“- ga ning liidame kolmandale reale (tulemuse kirjutame kolmanda rea kohale);

Saame

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & \vdots & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 18 & 12 & 0 & -1 & \vdots & 7 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Kuna igast reast oli juhtelement juba valitud, siis kirjutame välja maatriksile vastava võrrandite süsteemi:

$$\begin{cases} 18x_1 + 12x_2 - x_4 = 7 \\ 6x_3 - 5x_4 = -1 \end{cases}$$

Muutujate (otsitavate arv) on suurem võrrandite arvust, seepärast süsteemil on lõpmata palju lahendeid. Vastus tuleb kirja panna üldlahendina, selleks tähistame muutujaid $x_2 = C_1$ ja $x_4 = C_2$, kus $C_1, C_2 \in R$.

Märkus: muutujate arv on 4, nullist erinevate ridade arv viimases maatriksis on 2, seega meil on

$$4 - 2 = 2$$

vabamuutujat. Vabamuutujateks valime need muutujad, mis lahenduse käigus ei olnud juhtelemntide rollis. Meie juhul need on muutujad x_2 ja x_4.

Avaldame juhtelementidele vastavad muutujad saadud süsteemist ning kirjutame üldlahendi välja:

$$\begin{cases} 18x_1 + 12x_2 - x_4 = 7 \\ x_2 = C_1 \\ 6x_3 - 5x_4 = -1 \\ x_4 = C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 18x_1 + 12C_1 - C_2 = 7 \\ x_2 = C_1 \\ 6x_3 - 5C_4 = -1 \\ x_4 = C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{7 - 12C_1 + C_2}{18} \\ x_2 = C_1 \\ x_3 = \dfrac{-1 + 5C_4}{6} \\ x_4 = C_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{7}{18} - \dfrac{2}{3}C_1 + \dfrac{1}{18}C_2 \\ x_2 = C_1 \\ x_3 = \dfrac{5}{6}C_2 - \dfrac{1}{6} \\ x_4 = C_2 \end{cases}$$

Süsteemi üldlahend on $\begin{cases} x_1 = \frac{7}{18} - \frac{2}{3}C_1 + \frac{1}{18}C_2 \\ x_2 = C_1 \\ x_3 = \frac{5}{6}C_2 - \frac{1}{6} \\ x_4 = C_2 \end{cases}$

Omistedes konstantidele C_1 ja C_2 konktereid väärtusi, saame erilahendi. Näiteks kui võtta $C_1 = 1$ ja $C_2 = 2$, siis saame järgmise erilahendi: $\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{6} \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1{,}5 \\ x_4 = 2 \end{cases}$

Kui võtta $C_1 = 0$ ja $C_2 = 0$, siis saame nn baaslahendi: $\begin{cases} x_1 = \frac{7}{18} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -\frac{1}{6} \\ x_4 = 0 \end{cases}$