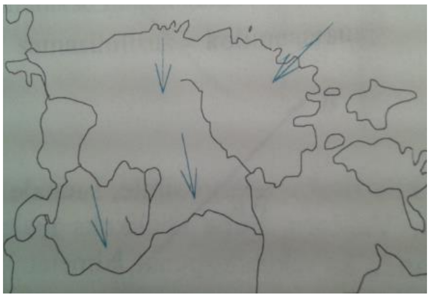
VEKTOR TASANDIL

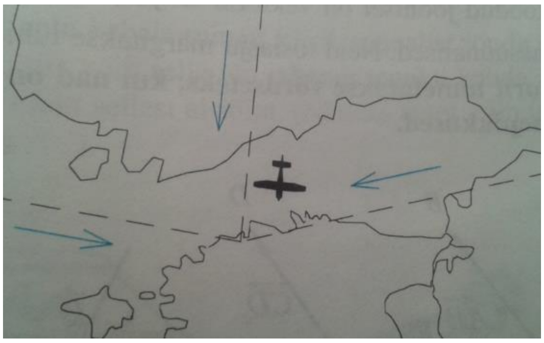
1. VEKTORI MÕISTE

Arvudega iseloomustatakse palju suurusi. Mõne suuruse määramiseks piisab ühest arvust ja mõõtühikust. Näiteks inimese mass on 67 kg, pinge vooluvõrgus on 220 V jne.

Selliseid suurusi, mida saab esitada ühe arvuga, nimetatakse **skalaarseteks suurusteks**.



Leidub ka suurusi, mille iseloomustamiseks ei piisa ühest arvust. Näiteks, purjekaile on vähe kasu ainult tuule kiiruse teadasaamisest (näiteks 25 m/s), vaja on teada ka tuule sihti ja suunda. Näiteks kujul „tuul puhub loode-kagu sihis, loodest kagusse . . .“ Ilmastikukaardil kukutatakse neid andmeid nooltega: nool näitab missuguses sihis ja suunas tuul puhub, noole pikkus näitab tuule tugevust. Selline nool kujutab ennast tuule **tugevusvektorit.**



Füüsikas kijutatakse vektoritega palju sid suurusid (näiteks nihe, kiirus, kiirendus, jõud). Vaatleme näiteks kiirust. Lennaku mingi lennuk trassil Tallin – Helsingi. Kaardile võib märkida lennutrassi. Lihtsuse mõttes loeme selle ligikaudu sirgeks. Noole suunaga märgime lennuki kursi (nt Helsingist Tallinna oole). Noole pikkus näitab aga seda, kui kiirelt lennuk liigub (nt 700 km/h). Trass määrab ***sihi*** ja kurss määrab ***suuna***, milles liikumine toimub.

Suurust, mille täielikuks määramiseks on peale arvväärtuse vaja ka sihti ja suunda, nimetatakse vektoriaalseks suurusteks.

Vektoriks nimetatakse suunatud sirglõiku.

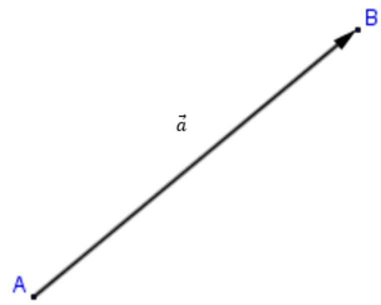
Sellist sirglõiku iseloomustavad ***siht, suund ja pikkus***.

- Siht näitab, kuidas vektor asetseb.
- Suund näitab, kummale poole on vektor suunatud.
- Pikkus näitab vektori arvväärtust.

Märkus. Vektor sisaldab rohkem informatsiooni kui sirge (on vaid siht) või lõik (on siht ja pikkus).

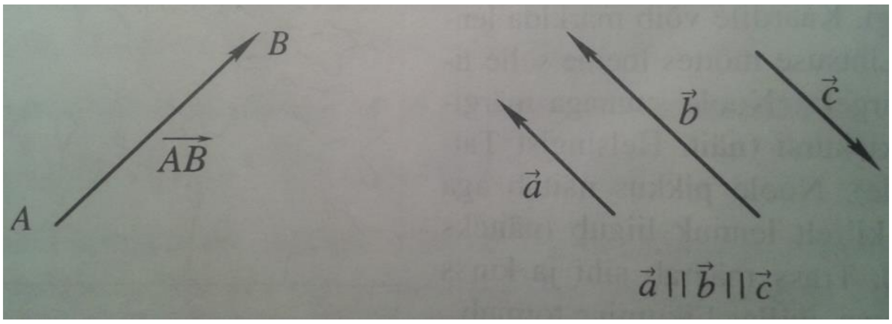
2. VEKTORITE TÄHISTAMISEST. VEKTORITE VÕRDSUS

Vektorit tähistatakse kas üheainsa tähega või vastava lõigu otspunktide juures oleva kahe tähega, mille kohal on joon. Joonisel on vektor $\overrightarrow{AB}$ ehk vektor $\vec{a}$. Kahetähilise märkimise korral tuleb esikohale kirjutada nn vektori alguspunkt ehk rakenduspunkt ning teisele kohale lõpp-punkt, et tähistuses edasi andaka vektori suunda.



Vektorid on samasihilised, kui nad on paralleelsed. Samasihilisuse jaoks kasutatakse matemaatikas ka teist sõna – **kollineaarsus.**

samasihilisus=kollineaarsus

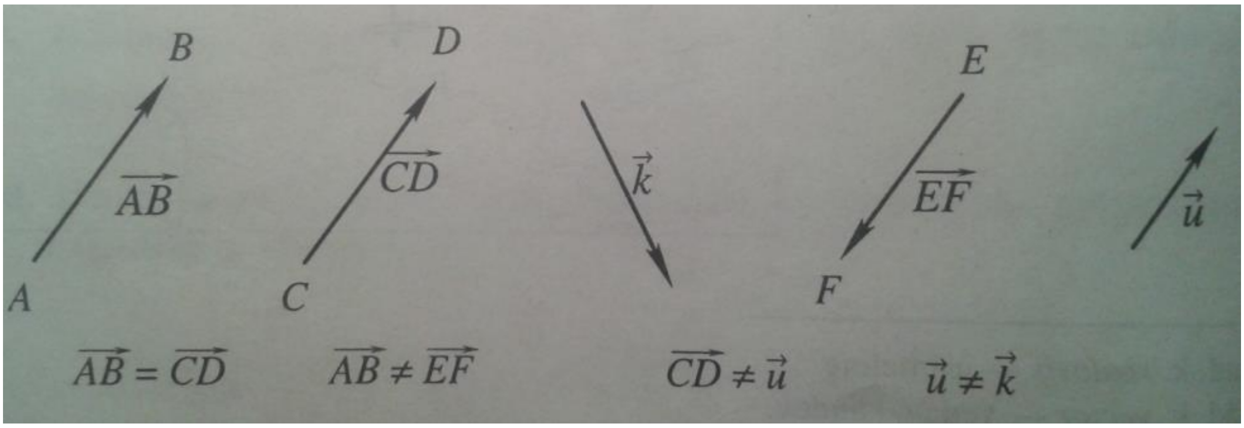


Samasihilised vektorid on kas samasuunalised või vastassuunalised.

Näiteks, üleltodud joonisel on vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on samasuunalised, vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{c}$ aga vastasuunalised. Neid tõsiasju märgitakse lühidalt nii:

$$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \text{ ja } \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{c}.$$

Kahte vektorit nimetatakse võrdseteks, kui nad on samasihilised, samasuunalised ja ühepikkused.



3. VEKTORITE LIIGITUS

Kas vektor sõltub sellest, millises punktis on ta alguspunkt, s. t. kas vektor sõltub oma raknduspunktist?

Seotud vektor

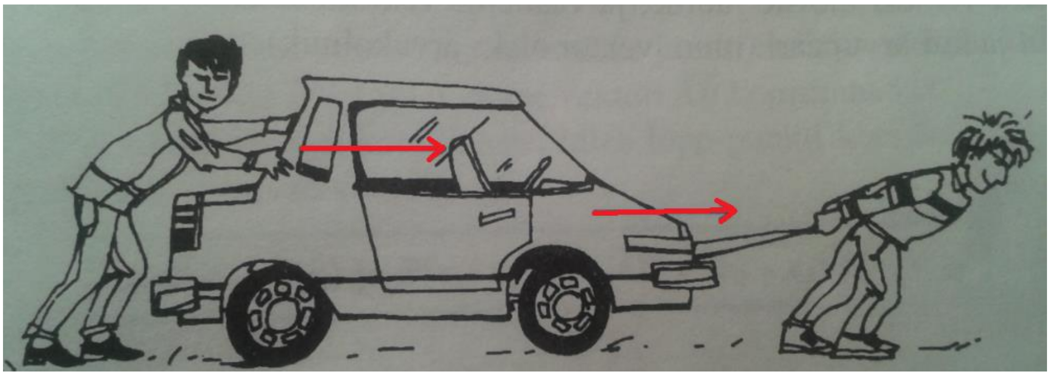
Vaatame näiteks tuule kiirusvektorit. Kuna tuule kiirus on erinevates punktides erinev, siis ilmastikukardile märgitavad vektorid on oma sihilt, suunalt ja pikkuselt erinevad. Tuule kiirus on lahutamatult seotud kohaga, mille jaoks tuule siht, suund ja kiirus antakse.

Seega selles näites lisaks vektori sihile, suunaleja pikkusele on vaja ka teada ka rakenduspunkti. Vektorit, mille täielikuks määramiseks on vaja peale sihi, suuna ja pikkuse anda ka rakenduspunkt, nimetatkse **seotud vektoriks.**

Libisev vektor

Kui mingi keha liigub mööda sirgjoont ühtlaselt, siis on ta kiirusvektor kogu aeg suuruselt, sihilt ja suunalt muutumatu. Sii on ükskõik, millise koha selle keha teel me valime kiirusevektori alguspunktiks.

Kui meie rakendame mingile jäigale kehale mingit kindlasuunalist jõudu (**näiteks** lükkame käsitsi sõiduautot),



siis võib selle jõu rakenduspunkti kanda edasi jõu mõjusirget. Jõu mõju efekt sellest ei sõltu. Näiteks autot võib tagant lükkamise asemel ka järel vedada.

Toodud näide – ühtlase sirgjoonelise liikumise kiirusvektor ja jäigale kehale rakendatud jõuvektor – on libiseva vektori näiteks.

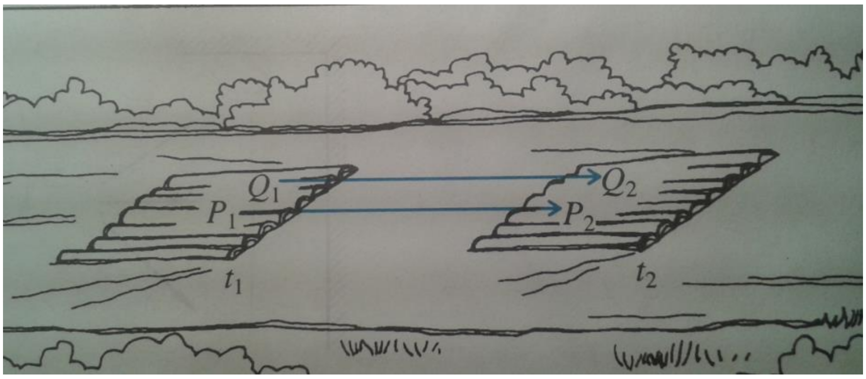
Vektorit, millerakenduspunkti võib vabalt valida vektori mõjusirgel, nimetatakse **libisevaks vektorks**.

Vabavektor

Järgmisena vaatleme näiteks ühtlase laiuse ja sügavusega sirges kanalisvoolava veega kaasaliikuvat parve. (vt allpool joonist)

Märgime parvel mingid vabalt valitud punktid P ja Q. Ajamomendil t_1 on need punktid kalda suhtes punktides P_1 ja Q_1 ,ajamomendil t_2 punktides P_2 ja Q_2. Et vool on ühtlane ja sirgejooneline, siis võib öelda, et

$P_1P_2 \parallel Q_1Q_2$, $P_1P_2 \uparrow\uparrow Q_1Q_2$ ja $P_1P_2 = Q_1Q_2$. Seega $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{Q_1Q_2}$.



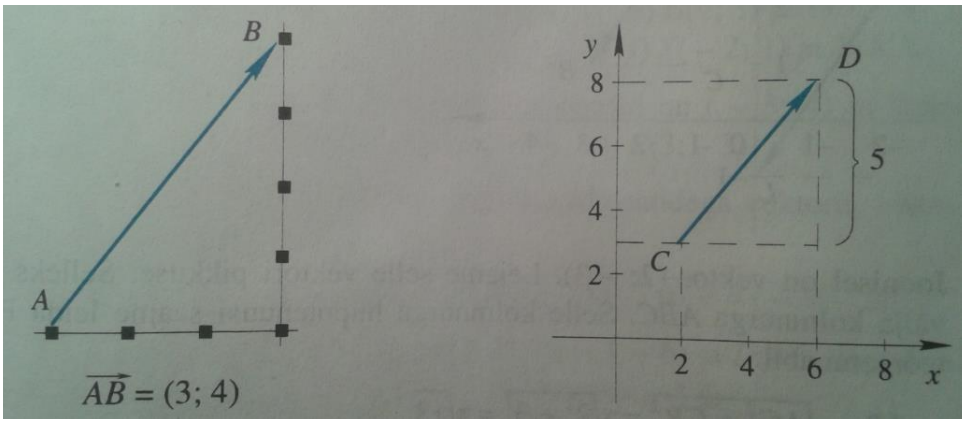
Võime öelda, et sellise kulgeva liikumise korral on parve kahel vabalt valitud punkil (järelikult ka kõigil ülejäänud punktidel) ühesugused nihkevektorid. Seega võime märkida nihkevektori lähtuvana selle parve suvalisest punktist. See kulgevalt (translatoorselt) liikuva parve punktide nihkevektor on üheks tüüpiliseks vabavektoriks.

Vektorit, mille rakenduspunkti võib ruumis vabalt valida, nimetatakse **vabavektoriks.**

Füüsikas läheb vaja neid kõiki vektorite tüüpe, *matemaatikas kasutatakse sagedamini vabavektoreid*. Samuti paneme tähele, et matemaatikas ei ole vektorite võrdsuse korral oluline, milline o vektorite alguspunkt. See võib olla kummalgi vektoril erinev.

4. VEKTORI KOORDINAADID

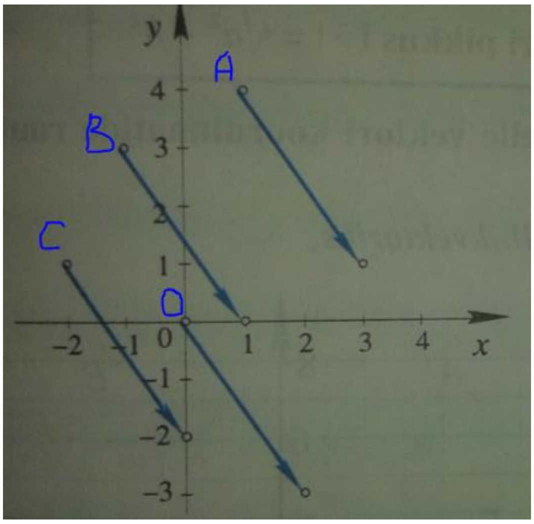
Nihet 3 ühikut paremale ja 4 ühikut üles saab esitada vektoriga $\overrightarrow{AB}$, nii nagu näha joonisel 1. Seda nihet saab esitada ka järjestatud arvupaariga (3; 4). Esimene arv näitab nihet x – telje suunas, teine y – tellje suunas.



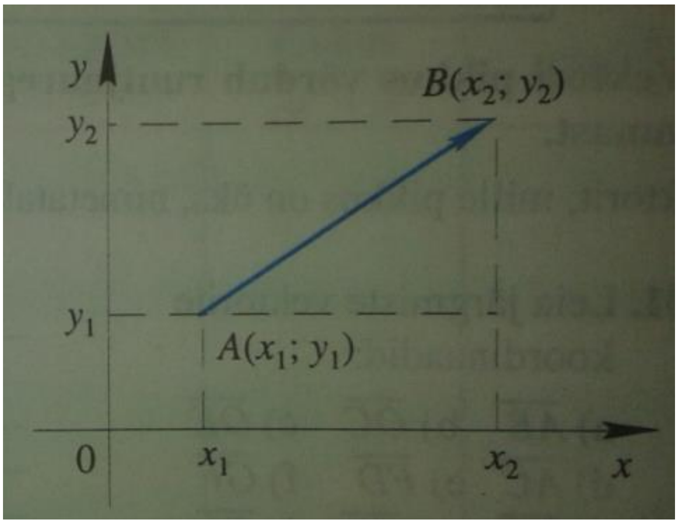
Joonis 1

Nihe koordinaattasandil punktist (2; 3) punkti (6; 8) on märgitav vektoriga $\overrightarrow{CD} = (4; 5)$. Vektor (2; -3) tähendaks koordinaattasandil nihet kahe ühiku võrra paremale ja kolme ühiku võrra alla.

Joonisel 2 on tehtud see nihe punktidest O(0;0), A(1; 4), B(-1; 3) ja C-2; 1).



Joonis 2



Joonis 3

Vektorit tasandil saab esitada arvupaari abil. Selles arvupaaris olevaid arve nimetatakse **vektori koordinaatideks** – esimesel kohal on esimene koordinaat, teisel kohal teine koordinat.

Võtame teljestikus kaks punkti $A(x_1;\ y_1)$ ja $B(x_2;\ y_2)$ (vt joonist 3). Selleks, et saada vektori $\overrightarrow{AB}$ koordinaate, tuleb lõpp-punkti koordinaatidest lahutada alguspunkti vastavad koordinaadid.

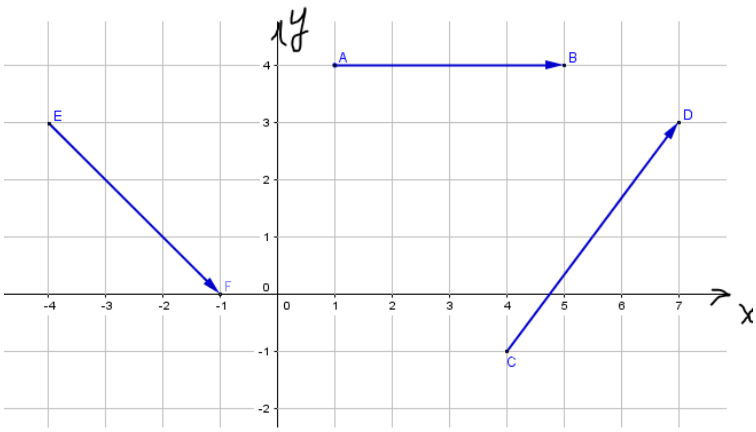
Kui $A(x_1;\ y_1)$ ja $B(x_2;\ y_2)$, siis $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$.

Olgu meil mingid kaks võrdset vektorit. On ilmne, et võrdsete vektorite vastavad koordinaadid on võrdsed, s. t. kui

$$\vec{u} = (a; b) \text{ ja } \vec{v} = (c; d), \text{ siis } \vec{u} = \vec{v} \implies (a = c \text{ ja } b = d)$$

Näide 1. Leida vektorite koordinaadid $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{EF}$ koordinaadid (joonis 4).

Lahendus. Vektori $\overrightarrow{AB}$ koordinaadid on arvupaar (4; 0) , kuna selleks, et jõuda punktist A punkti B on vaja sooritada nihet 4 ühiku võrra paremale (ehk x-telje positiivses suunas) ja 0 ühikut y-telje suunas.



Joonis 4

Vektori $\overrightarrow{CD}$ koordinaadid on arvupaar (3; 4) , kuna selleks, et jõuda punktist C punkti D on vaja sooritada nihet 3 ühiku võrra paremale (ehk x-telje positiivses suunas) ja 4ühiku võrra ülesse (ehk y-telje positiivses suunassuunas). Vektori $\overrightarrow{EF}$ koordinaadid on arvupaar (3; -3), kuna selleks, et jõuda punktist E punkti F on vaja sooritada nihet 3 ühiku võrra paremale (ehk x-telje positiivses suunas) ja 3 ühiku võrra ülesse (ehk y-telje negatiivses suunas)

Vastus. $\overrightarrow{AB} = (4; 0), \overrightarrow{CD} = (3; 4), \overrightarrow{EF} = (3;\ -3)$

Näide 2. Leida vektori $\overrightarrow{AB}$ koordinaadid, kui $A(-1;\ -2)$ ja $B(4; -6)$.

Lahendus. Selleks, et saada vektori $\overrightarrow{AB}$ koordinaate, tuleb lõpp-punkti koordinaatidest lahutada alguspunkti vastavad koordinaadid.

$$\overrightarrow{AB} = \big(4 - (-1);\ -6 - (-2)\big) = (5;\ -4)$$

Vastus. $\overrightarrow{AB} = (5;\ -4)$

Näide 3. Leiame vektori $\vec{a}$ lõpp-punkti koordinaadid, kui alguspunkt on koordinaatidega (0; -5) ja $\vec{a} = (2; 5)$.

Lahendus. Lähtume valemist, et kui $A(x_1;\ y_1)$ ja $B(x_2;\ y_2)$, siis $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$. Olgu $\vec{a} = (x; y)$. See tähendab,et

$$x = x_2 - x_1$$

$$y = y_2 - y_1,$$

$$\text{kust } x_2 = x + x_{1,}\ y_2 = y + y_1,$$

Seega on antud vektori lõpp-punkti koordinaadid

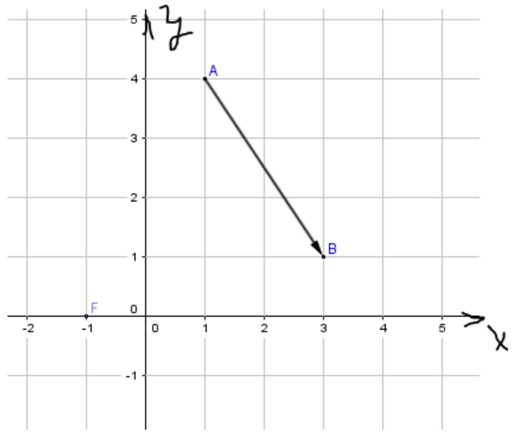
$$x_2 = 0 + 2 = 2$$

$$y_2 = -5 + 5 = 0$$

Vastus. Vektori lõpp-punktiks on (2; 0)

5. VEKTORI PIKKUS

Joonisel (joonis 1) on vektor $\overrightarrow{AB} = (2;\ -3)$. Leiame selle vektori pikkuse.



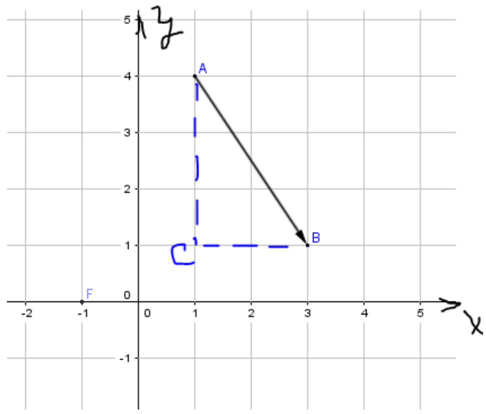
Joonis 1

Selleks joonistame välja kolmnurga ABC (vt joonist 2). Selle kolmnurga hüpotenuusi saame leida Pythagorase teoreemi abil:

$$AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

Seega vektori $\overrightarrow{AB}$ pikkus on $\sqrt{13}$ pikkuse ühikut.

Vektori pikkust tähistatakse $|\overrightarrow{AB}|$, vektori tähis kirjutatakse püstkriipsude vahel. Et vektori $\overrightarrow{AB}$ pikkus ja sellele vastava lõigu AB pikkius on võrdsed, siis vahel märgitakse vektori $\overrightarrow{AB}$ pikkust lihtsalt nii: AB.



Joonis 2

Seega,

$$\boxed{\textbf{Kui } \vec{v} = (a; b), \textbf{ siis selle vektori pikkus } |\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Vektori pikkus võrdub ruutjuurega selle vektori koordinaatide ruutude summast.

Ning

Kui $A(x_1;\ y_1)$ ja $B(x_2;\ y_2)$, siis $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Vektorit, mille pikkus on üks, nimetatakse ***ühikvektoriks.***

Näide 1.Leida vektori $\vec{p} = (-1; 3)$ pikkus.

Lahendus. $|\vec{p}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

Vastus. $|\vec{p}| = \sqrt{10}$

Näide 2 .Leida vektori $\overrightarrow{KL}$ pikkus, kui $K(1; 2)$ja $L(3; 4)$

Lahendus. Leiame vektori $\overrightarrow{KL}$ koordinaadid. $\overrightarrow{KL} = (3 - 1; 4 - 2)$ ehk $\overrightarrow{KL} = (2; 2)$, Seega $|\overrightarrow{KL}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Vastus. $|\overrightarrow{KL}|$=$2\sqrt{2}$

6. VEKTORITE LIITMINE

Vektoreid saab liita. Seda on võimalik teha, kui on teada *vektori koordinaadid* või *vektor on esitatud geomeetrilisel kujul.*

NB! Kui liidame vektorid, tulemuseks saame uue vektori.

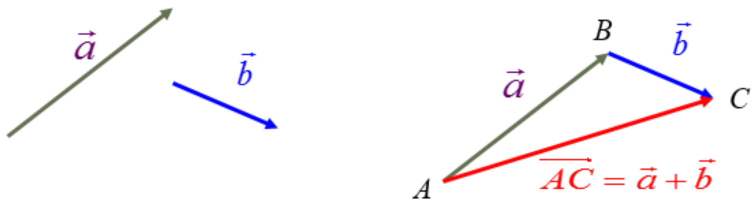
Vektorite geomeetriline liitmine

Geomeetrilisel kujul esitatud vektorite liitmiseks kasutatakse:

- kolmnurgareeglit
- rööpkülikureeglit
- hulknurgareeglit

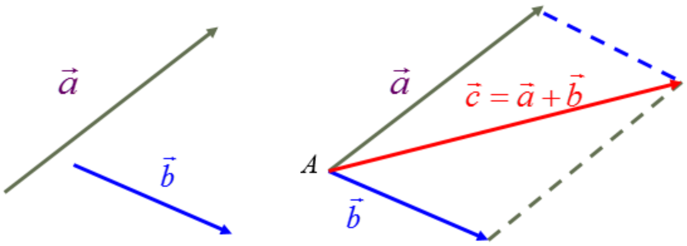
Komnurgareegel

Kahe vektori $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ summa leidmiseks joonestame mingist punktist A esmalt vektori $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ning siis selle lõpp-punktist B vektori $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Ühendades punktid A ja C, saame vektori $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$



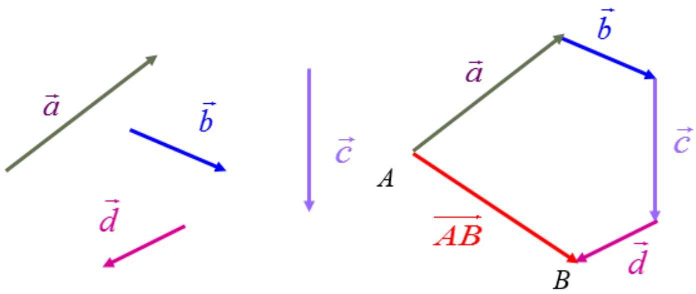
Rööpkülikureegel

Kui joonestame liidetavad vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ühisest alguspunktist A, siis neile vektoritele ehitatud rööpküliku diagonaalvektor alguspunktiga A on vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ summa.



<u>Hulknurgareegel</u>

Mitme vektori summa leidmiseks joonestame mingist punktist A ühe liidetava; selle lõpp-punktist teise liidetava; viimase lõpp-punktist kolmanda jne. Nende vektorite summaks on siis punktist A viimase liidetava lõpp-punkti B suunduv vektor $\overrightarrow{AB}$



Vektorite liitmine koordinaatides

Olgu vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ antud oma koordinaatidega:

$$\vec{a} = (x_1;\ y_1) \text{ ja } \vec{b} = (x_2;\ y_2).$$

Leiame vektorite summa $\vec{a} + \vec{b}$ koordinaadid:

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}} = (\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2};\ \boldsymbol{y_1} + \boldsymbol{y_2})}$$

Sõnastatult:

Vektorite summa koordnaatideks on liidetavate vektorite vastavate koordinaatide summad.

Näide. Leiame $\vec{u} + \vec{v}$, kui $\vec{u} = (5;\ -8)$ ning $\vec{v} = (2; 1)$.

Lahendus. Eespool esitatud eeskirja kohaelt tuleb vastavad koordinaadid liita. Seega

$$\vec{u} + \vec{v} = (5;\ -8) + (2; 1) = (5 + 2;\ -8 + 1) = (7;\ -7)$$

Vastus. $\vec{u} + \vec{v} = (7;\ -7)$

7. VEKTORITE LAHUTAMINE

Vektoreid saab lahutada. Seda on võimalik teha, kui on teada *vektori koordinaadid* või *vektor on esitatud geomeetrilisel kujul.*

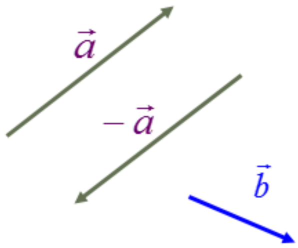
NB! Kui lahutame vektorid, tulemuseks saame uue vektori.

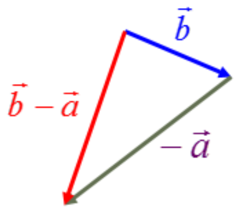
Märkus.

- Vektorit $\vec{O} = (0; 0)$ nimetatakse ***nullvektoriks.***
- Vektori $\vec{a} = (x_1; y_1)$ ***vastandvektoriks*** nimetatakse vektorit $-\vec{a} = (-x_1; -y_1)$.
- $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{O}$

Vektorite geomeetriline lahutamine

Vektorite lahutamine tähendab vastandvektori liitmist. Vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ lahutamisel paigutame need nii, et nad lähtuksid ühisest alguspunktist. Seejärel võib asendada vektori $\vec{b}$ ta vastandvektoriga $-\vec{b}$ ja liita vektorid $\vec{a}$ ja $-\vec{b}$ kolmnurga reegli järgi.





Vektorite lahutamine koordinaatides

Olgu vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ antud oma koordinaatidega:

$$\vec{a} = (x_1;\ y_1) \text{ ja } \vec{b} = (x_2;\ y_2).$$

Leiame vektorite vahe $\vec{a} - \vec{b}$ koordinaadid:

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{a}} - \vec{\boldsymbol{b}} = (\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2};\ \boldsymbol{y_1} - \boldsymbol{y_2})}$$

Sõnastatult:

Vektorite vahe koordnaatideks on lahutatavate vektorite vastavate koordinaatide vahed.

Näide. Leiame $\vec{u} - \vec{v}$, kui $\vec{u} = (5;\ -8)$ ning $\vec{v} = (2; 1)$.

Lahendus. Eespool esitatud eeskirja kohaelt tuleb vastavad koordinaadid lahutada. Seega

$$\vec{u} - \vec{v} = (5;\ -8) - (2; 1) = (5 - 2;\ -8 - 1) = (3;\ -9)$$

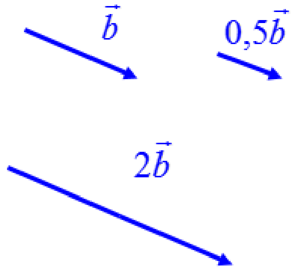
Vastus. $\vec{u} - \vec{v} = (3;\ -9)$

8. VEKTORI KORRUTAMINE ARVUGA

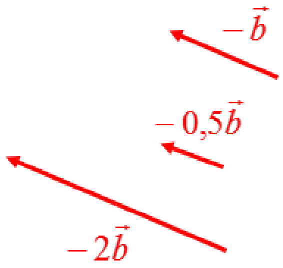
Vektorit saab arvuga korrutada. Seda on võimalik teha, kui on teada *vektori koordinaadid* või *vektor on esitatud geomeetrilisel kujul.*

Vektori korrutamine arvuga geomeetriliselt

Vektori $\vec{a}$ ja positiivese arvu k korrutiseks $k\vec{a}$ on vektoriga $\vec{a}$ samasuunaline vektor, mille pikkus on $k|\vec{a}|$



Vektori $\vec{a}$ ja negatiivse arvu $-k$ ($k > 0$) korrutiseks nimetatakse vektori $k\vec{a}$ vastandvektorit $-k\vec{a}$



On teada, et kahte samasihilist vektorit nimetatakse ka kollineaarseteks vektoriteks. Teiselt poolt, vektorite kollineaarsust defineeritakse vahel järgmiselt:

.

Kaht vektorit $\vec{a}$ ja $\vec{b}$, mille vahel kehtib seos $\vec{u} = k\vec{v}$, kus k on konstant, nimetatakse kollineaarseteks

Vektori korrutamine arvuga koordinaatides

Olgu vektor $\vec{a}$ on antud oma koordinaatideg $\vec{a} = (a_1; a_2)$ ning k on arv. Siis

$$k\vec{a} = (ka_1; ka_2)$$

Sõnastatult:

vektori korrutamiseks mingi arvuga tuleb selle arvuga korrutada vektori koordinaate.

Näide 1. Leiame $-5\vec{a}$, kui $\vec{a} = (-2; 4)$

Lahendus. $-5\vec{a} = (-5 \cdot (-2);\ -5 \cdot 4)) = (10;\ -20)$

Vastus. $-5\vec{a} = (10;\ -20)$

Kahe kollineaarse vektori $\vec{a} = (a_1; a_2)$ ja $\vec{b} = (b_1; b_2)$ koordinaadid on võrdelised, s.t.

$$\boxed{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}}$$

Näide 2. Vektoritest $\vec{a} = (-6; 4), \vec{b} = (3;\ -2); \vec{c} = (12; 8)$ vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on kollineaarsed.

9. VEKTORITE SKALAARKORRUTIS

Kahe vektori $\vec{a} = (x_1;\ y_1)$ ja $\vec{b} = (x_2;\ y_2)$ **skalaarkorrutiseks** nimetatakse nende vektorite pikkuste ja vektorite vahelise nurga koosinuse korrutist, s.t.

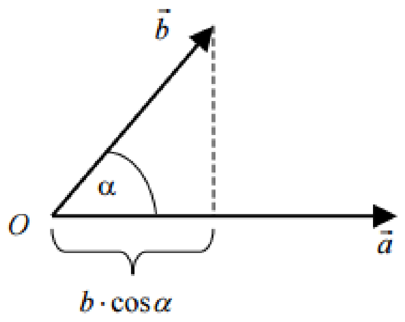
$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha}$$

kus α on vektorite vaheline nurk.

Skalaarkorrutis väärtus võib olla positiivne, negatiivne, kui ka null *sõltuvalt vektorite vahelisest nurgast*.

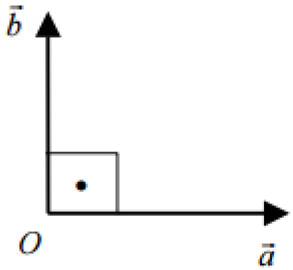
Esineb 3 juhtumit:

1.juhtum : kui vektorite vahel on teravnurk



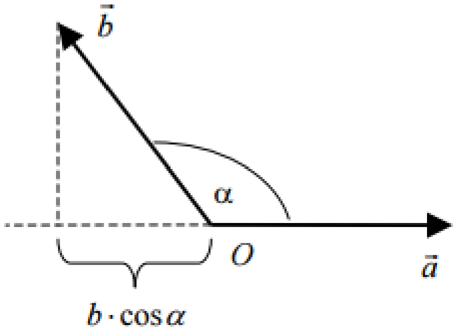
$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$

2.juhtum: kui vektorite vahel on täisnurk (vektorid on risti)



$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0,$

3.juhtum: kui vektorite vahel on nürinurk



$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$

2. juhtumist järeldub, et kui vektorid on risti, siis skalaarkorrutis on null. Kehtib ka vastupidi: kui vektorite skalaarkorrutis on null, siis vektorid on risti.

Näide 1. Leida vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ skalaarkorrutis, kui $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 8$ ja nurk nende vektorite vahel on 60°.

Lahendus. Kasutame valemit

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha$$

Saame $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ = 12$.

Vastus. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$

Seda valemit kasutatakse ka kahe vektori vahele jääva nurga arvutamisel

Näide 2. Kui kahe vektori skalaarkorrutis on 2,5 ja nendevektorite pikkused on 10 ja 0,5. Leida vektorite vaheline nurk.

Lahendus. Avaldame valemist

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Saame $\cos\alpha = \frac{2{,}5}{10 \cdot 0{,}5} = 0{,}5$, seega $\alpha = 60^\circ$.

Vastus. $\alpha = 60^\circ$

Vektorite skalaarkorrutise arvutamine vektorite koordinaatide abil

Olgu vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ antud oma koordinaatidega:

$$\vec{a} = (x_1;\ y_1) \text{ ja } \vec{b} = (x_2;\ y_2).$$

Koordinaatkujul antud vektorite korral leiame **skalaarkorrutise** valemist

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2}$$

Näide 3. Olgu $\vec{m} = (5;\ -2)$ ja $\vec{n} = (3;\ -1)$. Leida vektorite skalaarkorrutis.

Lahendus. $\vec{m} \cdot \vec{n} = 5 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) = 13$

Vastus. $\vec{m} \cdot \vec{n} = 13$

Näide 4. Olgu $\vec{m} = (5;\ -2)$ ja $\vec{n} = (3;\ -1)$. Leida vektorite vaheline nurk.

Lahendus.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|}$$

Kasutame eelmise ülesande tulemust, et $\vec{m} \cdot \vec{n} = 13$.

Leiame mõlema vektori pikkuse

$$|\vec{m}| = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

Seega

$\cos\alpha = \dfrac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \dfrac{13}{\sqrt{290}} \approx 0{,}7633$, kust $\alpha \approx 40^\circ$

Vastus: $\alpha \approx 40^\circ$