

VEKTOR ülesanded lahendustega

Ülesanne 1.

On antud kaks punkti $A(2, 1)$ ja $B(-2, 3)$. Leda vektori \overline{AB} koordinaadid.

Lahendus. Vastava valemi järgi saame:

$$\overline{AB}(-2 - 2; 3 - 1) = \overline{AB}(-4; 2)$$

Vastus. $\overline{AB}(-4; 2)$

Ülesanne 2

On antud punktid $A(-3, 5)$ ja $B(1, -3)$. Leida vektori \overline{AB} pikkus.

Lahendus. Algul leiame vektori \overline{AB} koordinaadid:

$$\overline{AB}(1 - (-3); -3 - 5) = \overline{AB}(4; -8)$$

Arvutame vektori pikkuse:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{4^2 + (-8)^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

Vastus. $|\overline{AB}| = 4\sqrt{5}$

Ülesanne 3.

On antud vektorid $\vec{a}(1, -2)$ ja $\vec{b}(2, 3)$. Leida $2\vec{a}$, $\vec{a} + \vec{b}$ ja $\vec{a} - \vec{b}$

Lahendus. Lahendame algebraiselt (joonist tegemata)

$$2\vec{a} = 2(1; -2) = (2; -4)$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (1; -2) + (2; 3) = (1+2; -2+3) = (3; 1)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (1; -2) - (2; 3) = (1-2; -2-3) = (-1; -5)$$

Vastus. $2\vec{a} = (2; -4)$, $\vec{a} + \vec{b} = (3; 1)$, $\vec{a} - \vec{b} = (-1; -5)$

Ülesanne 4. On antud vektorid $\vec{a}(1, -2)$, $\vec{b}(2, 0)$, $\vec{c}(-4, 2)$. Leida $3\vec{a} - 5\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ ja $-2(\vec{a} - 2\vec{c}) + 4\vec{b}$.

Lahendus.

$$3\vec{a} - 5\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} = 3(1; -2) - 5(2; 0) + \frac{1}{2}(-4; 2) = (3; -6) - (10; 0) + (-2; 1) =$$

$$= (3 - 10 + (-2); -6 - 0 + 1) = (-9; -5)$$

$$-2(\vec{a} - 2\vec{c}) + 4\vec{b} = -2((1; -2) - 2(-4; 2)) + 4(2; 0) = -2((1; -2) - (-8; 4)) + (8; 0) =$$

$$= -2(1 - (-8); -2 - 4) + (8; 0) = -2(9; -6) + (8; 0) = (-18; 12) + (8; 0) =$$

$$= (-18 + 8; 12 + 0) = (-10; 12)$$

Vastus.

$$3\vec{a} - 5\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} = (-9; -5), \quad -2(\vec{a} - 2\vec{c}) + 4\vec{b} = (-10; 12)$$

Ülesanne 5. Leida vektorite \overline{AB} ja \overline{AC} skalaarkorrutis, kui $A(1, -1, 3)$, $B(0, 1, -2)$, $C(4, -4, 0)$

Lahendus. Algul leiame vektorid

$$\overline{AB}(0 - 1; 1 - (-1); -2 - 3) = \overline{AB}(-1; 2; -5)$$

$$\overline{AC}(4 - 1; -4 - (-1); 0 - 3) = \overline{AC}(3; -3; -3)$$

Nüüd leiame vektorite skalaarkorrutis.

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = -1 \cdot 3 + 2 \cdot (-3) + (-5) \cdot (-3) = -3 - 6 + 15 = 6$$

Vastus. Vektorite skalaarkorrutis on 6

VEKTOR ülesanded lahendustega

Ülesanne 6. Leida vektorite $\vec{a}(2, -5)$ ja $\vec{b}(-1; 0)$ skalaarkorrutis.

Lahendus. $\vec{a}\vec{b} = 2 \cdot (-1) + (-5) \cdot 0 = -2 + 0 = -2$

Vastus. Vektorite skalaarkorrutis on

Ülesanne 7. Leida vektorite \vec{a} ja \vec{b} skalaarkorrutis, kui

$$|\vec{a}| = 2, \quad |\vec{b}| = 5, \quad \angle(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\pi}{6} \quad (\text{ehk nurk vektorite vahel on } 30^\circ)$$

Lahendus. Kasutame velemid

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}; \vec{b})$$

Saame

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}; \vec{b}) = 2 \cdot 5 \cdot \cos \frac{\pi}{6} = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

Vastus. Vektorite skalaarkorrutis on $5\sqrt{3}$.

Ülesanne 8. Leida nurk vektorite \vec{a} ja \vec{b} vahel, kui on teada, et

$$|\vec{a}| = 4, \quad |\vec{b}| = 2\sqrt{2}, \quad \vec{a}\vec{b} = 8$$

Lahendus: Kasutane skalaarkorrutise valemit ning avaldame nurga koosinuse:

$$\cos \angle(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{8}{4 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Seega kui $\cos \angle(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, siis $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$

Vastus. $\frac{\pi}{4}$

Ülesanne 9. Leida vektorite $\vec{a}(2, -5)$ ja $\vec{b}(-1; 0)$ skalaarkorrutis.

Lahendus. $\vec{a}\vec{b} = 2 \cdot (-1) + (-5) \cdot 0 = -2 + 0 = -2$

Vastus. Vektorite skalaarkorrutis on -2.

Ülesanne 10. Kontrollida kas vektorid on risti $\vec{a}(1, 2, -4)$ ja $\vec{b}(6, -1; 1)$

Lahendus. Leiame vektorite skaaleerorrutis

$$\vec{a}\vec{b} = 1 \cdot 6 + 2 \cdot (-1) + (-4) \cdot 1 = 6 - 2 - 4 = 0$$

Kuna skalaarkorrutis on 0, võime järeldada et vektorid on risti.

Vastus. Vektorid on risti.

Ülesanne 11. Leida vektorite

$$\vec{c} = \vec{a} - 4\vec{b}, \quad \vec{d} = -2\vec{a} - \vec{b},$$

skalaarkorrutis, kui $\vec{a}(5; 7), \vec{b}(1; 1)$

Lahendus. Leiame vektori \vec{c} :

$$\vec{c} = \vec{a} - 4\vec{b} = (5; 7) - 4(1; 1) = (5; 7) - (4; 4) = (1; 3)$$

Leiame vektori d \vec{d} :

$$\vec{d} = -2\vec{a} - \vec{b} = -2(5; 7) - (1; 1) = (-10; -14) - (1; 1) = (-11; -15)$$

Leiame skalaarkorrutis:

$$\vec{c}\vec{d} = 1 \cdot (-11) + 3 \cdot (-15) = -11 - 45 = -56$$

Vastus: $\vec{c}\vec{d} = -56$