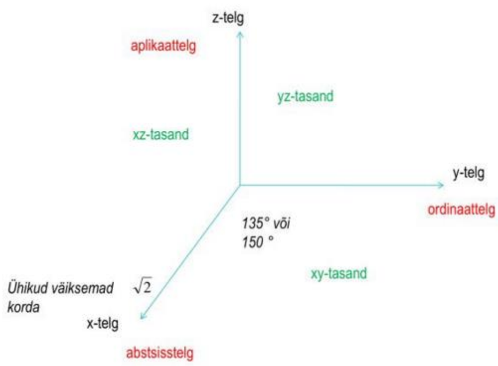
VEKTOR RUUMIS

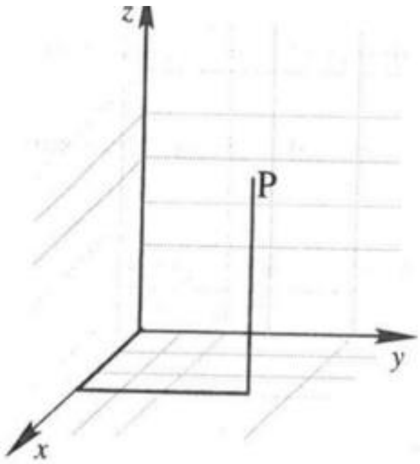
1. PUNKTI KOORDINAADID RUUMIS

Vaatleme kuidas konstrueeritakse ristkoordinaatteljestik ruumis. Selleks võtame kasutusele kolm koordinaattelge (nimetame neid x-teljeks, y-teljeks ja z-teljeks). Neist kolmest teljest mistahes kaks omavahel risti. Raamatus või vihikus kujutatakse sellist teljestikku tavaliselt nii, et nurk x-telje ja y-telje vahel on 135° või 150° (vt joonist). Igal teljel valime positiivse suuna ja pikkusühiku.

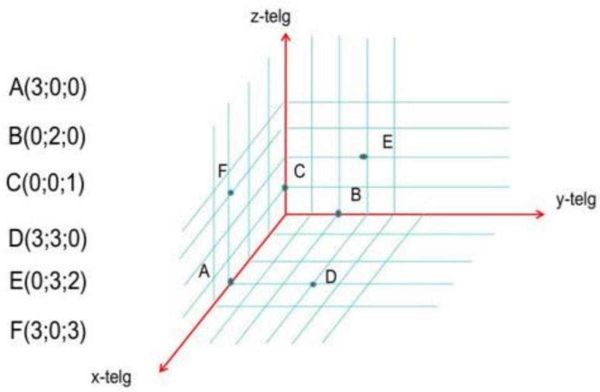


Selleks, et saada võimalikult väikeste moonutustega joonist valitakse x-telje suunaline pikkusühik $\sqrt{2}$ korda lühem y-telje ja z-telje pikkusühikust.

Ruumis kirjeldab punkti asukohta järjestatud arvukolmik. Toome näide, sellest mida tähendab , et punkti P koordinaadid on näiteks (3; 4; 5). Kõigepealt konstrueerime koordinaatteljestiku kooos abijoonte võrgustikuga. Selleks, et leida P asukohta koordinaatteljestikus liigume koordinaatide alguspunktist 3 ühikut x- telje positiivses suunas, 4 ühikut y- telje positiivses suunas ja seejärel 5 ühikut z- telje positiivses suunas. Juhul, kui mõni punkti koordinaat on negatiivne arv, siis tuleb mööda vastavat telge liikuda negatiivses suunas.



Näide 1.



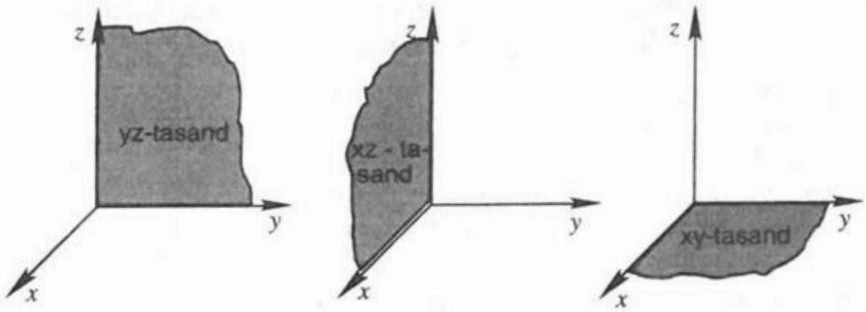
Vaatleme nüüd neid neid juhtumeid, kui mõni punkti koordinaatidest on 0.

Punkti x koordinaat on 0.
Sellisel juhul liikumist x-telje sihis ei toimu. Kuna liikumine toimub vaid y-telje ja z-telje sihis, siis öeldakse, et punkt asub ***yz*-tasandil** (vt vasakpoolset joonist).

Punkti y koordinaat on 0.
Nüüd ei toimu liikumist y-telje sihis. Liikumine toimub vaid x-telje ja z-telje sihis. Seega asub punkt ***xz*-tasandil** (vt keskmist joonist).

Punkti z koordinaat on 0.

Kuna sel juhul toimub liikumine vaid x-telje ja y-telje sihis, siis öeldakse, et punkt asub ***xy*-tasandil** (vt parempoolset joonist).



Vaatleme nüüd juhtumeid, kui punkti kaks koordinaati võrduvad nulliga. Selliseid juhtumeid on kolm:

1) Kui punkti x-koordinaat ja y-koordinaat võrduvad nulliga, siis asub punkt z-teljel;

2) kui punkti x-koordinaat ja z-koordinaat võrduvad nulliga, siis asub punkt y-teljel;

3) kui punkti y-koordinaat ja z-koordinaat võrduvad nulliga, siis asub punkt x-teljel.

Punkt, mille kõik koordinaadid on nullid, on koordinaatide alguspunkt.

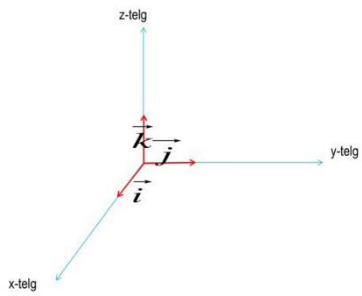
2. PUNKTI KOHAVEKTORI KOORDINAADID

Ruumis, nii nagu tasandilgi, nimetatakse vektoriks suunatud sirglõiku, mida iseloomustavad suurusteks on pikkus, siht ja suund.

Valime koordinaatteljestikus mingi punkt P ($x_{i;}\ y_i;\ z_i$). Vektorit, mis ühendab koordinaatide alguspunkti O ja punkti P nimetetakse **punkti P kohavektoriks**.

Vektrorit pikkusega 1 ühik nimetatakse ühikvektoriks. Koordinaattelgede suunalisi vektoreid tähistatakse

$$\boxed{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}}$$



Punkti kohavektori koordinaadid võrduvad punkti enda koordinaatidega,

s.t. $\overrightarrow{OP} = (x_1; y_1; z_1)$.

Näide 2. Olgu antud punkt P(-2; 3; -4). Selle punkti kohavektor on siis

$\overrightarrow{OP} = -2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$.

3. VEKTORI KOORDINAADID RUUMIS

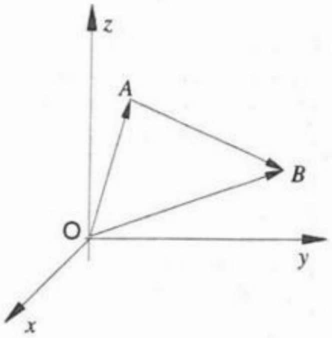
Olgu vektor määratud kahe punktiga $A(x_1; y_1; z_1)$ ja $B(x_2; y_2; z_2)$. Leiame neid punkte ühendava vektori $\overrightarrow{AB}$ koordinaadid. Kirjutame välja punktide A ja B kohavektorite koordinaadid. Eelneva põhjal teame, et

$\overrightarrow{OA} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ ja

$\overrightarrow{OB} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ ehk

kui on antud punktid $A(x_1; y_1; z_1)$ ja $B(x_2; y_2; z_2)$, siis

$\overrightarrow{OA} = (x_1; y_1; z_1)$ ja $\overrightarrow{OB} = (x_2; y_2; z_2)$.



Kuna $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, siis

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1).}$$

Vektori $\overrightarrow{AB}$ saab esitada koordinaattelgede sihiliste ühikvektorite abil järgmiselt:

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}.}$$

Seega on iga vektor avaldatav oma koordinaatide ja koordinaattelgedele vastavate ühikvektorite korrutiste summana, s.t. kui $\vec{k} = (x_1; y_1; z_1)$, siis

$\vec{k} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$.

Näide 3.

Leiame punktidega $A(-4; 3; 2)$ ja $B(5; -3; 1)$ määratud vektori $\overrightarrow{AB}$ koordinaadid.

$\overrightarrow{AB} = [5-(-4); -3-3; 1-2] = (9; -6; -1)$.

Näide 4.

Teades, et $\overrightarrow{AB} = (4; 1; -5)$ ja alguspunkt $A(0; 2; -1)$ leiame vektori $\overrightarrow{AB}$ lõpp-punkti B koordinaadid.

Olgu punkt B koordinaatidega $B(x_1; y_1; z_1)$. Et vektori koordinaadid on võrdsed vektori lõpp-punkti ja alguspunkti vastavate koordinaatide vahega, siis kehtivad võrdused

$x_1 - 0 = 4,\quad y_1 - 2 = 1$ ja $z_1 - (-1) = -5$, millest

$x_1 = 4, y_1 = 3$ ja $z_1 = -6$.

Seega lõpp-punkt on $B(4; 3; -6)$.

Näide 5.

Leiame alguspunkti, kui $\overrightarrow{AB} = (4; 3; 2)$ ja lõpp-punkt $B(-2; 4; 5)$.

Olgu alguspunkt $A(x_1; y_1; z_1)$. Järelikult kehtivad võrdused

$-2 - x_1 = 4,\quad 4 - y_1 = 3$ ja $5 - z_1 = 2$, millest

$x_1 = -6,\ y_1 = 1$ ja $z_1 = 3$.

Seega alguspunkt on $A(-6; 1; 3)$.

4. VEKTORI PIKKUS

Olgu meil vaja leida vektori $\vec{a} = (X;\ Y;\ Z)$ pikkus. Avaldame vektori $\vec{a}$ kujul

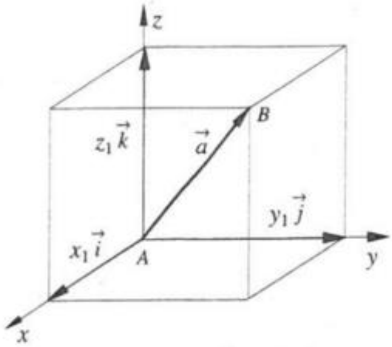
$\vec{a} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$.

Sel juhul on vektor $\vec{a}$ sellise risttahuka diagonaaliks, mille servadeks on vektorid

$X\vec{i}$, $Y\vec{j}$ ja $Z\vec{k}$.

Rakendades kaks korda Pythagorase teoreemi saame, et

$|\vec{a}|^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$, millest



$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.}$$

Vektori pikkus võrdub ruutjuurega oma koordinaatide ruutude summast.

Näide 6.

Leiame vektori $\vec{a} = (3; 4; -5)$ pikkuse.
Vektori pikkuse arvutamise valemi järgi saame, et

$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}1$.

Kui vektori $\overrightarrow{AB}$ alguspunkt on $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ja lõpp-punkt $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, siis vektori $\overrightarrow{AB}$ pikkuse leidmiseks kasutame valemit

$$\boxed{|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.}$$

Märkus: Sama valemiga arvutatakse ka kahe punkti A ja B vahelist kaugust.

Näide 7.

Leiame punktidega $A(1; 2; 3)$ ja $B(3; 4; 5)$ määratud vektori pikkuse.
Viimase valemi põhjal saame, et

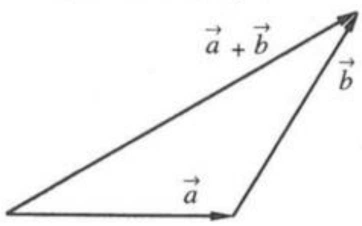
$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(3-1)^2 + (4-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

5. VEKTORITE LIITMINE, LAHUTAMINE JA ARVUGA KORRUTAMINE

Vektoreid saab ruumis liita, lahutada ja arvuga korrutada. Neid tehteid nimetatakse ka lineaarteheteks. Järgnevalt vaatlemegi, kuidas ruumivektoreid liita, lahutada ja arvuga korrutada.

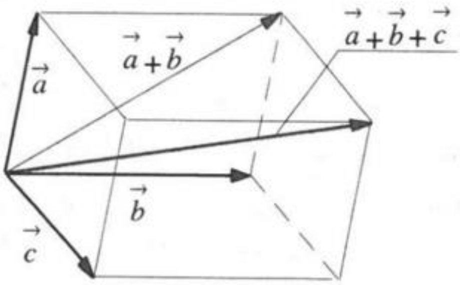
Olgu antud kaks vektorit $\vec{a}$ ja $\vec{b}$. Nende vektorite geomeetrilisel liitmisel võime kasutada varasemast tuntud **kolmnurgareeglit:**

Et liita kahte vektorit, selleks paigutame need vektorid nii, et esimese vektori $\vec{a}$ lõpp-punkt ühtib teise vektori $\vec{b}$ algusega. Summavektor $\vec{a} + \vec{b}$ ühendab esimese vektori algust teise lõpuga.



Kolmnurgareegli abil saab liita ka rohkem kui kahte vektorit. Selliseid näiteid vaatlesime juba peatüki algul olevas kordamise osas. Praktikas kasutatakse ka sageli kolmnurgareeglist tulenevat **rööpkülikureeglit**.

Võtame kolm ühest punktist A väljuvat vektorit $\vec{a}, \vec{b}$ ja $\vec{c}$, mis ei asu ühel tasandil (vt joonist). Vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ asetsevad aga ühel tasapinnal ja neid saab liita rööpkülikureegli järgi. Olgu summavektor vektor $\vec{d}$, kus $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$. Vektorid $\vec{d}$ ja $\vec{c}$ asuvad samuti ühel ja samal tasapinnal ning neidki saab rööpkülikureegli järgi liita. Tähistame saadud summavektori tähega $\vec{m}$, s.t. $\vec{m} = \vec{d} + \vec{c}$.



Arvestades eespool kasutusele võetud tähistusi võime kirjutada, et

$\vec{m} = \vec{d} + \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Kokkuvõttes võime öelda, et **kolme ruumivektori summa leidmiseks ehitame nendele vektoritele rööptahuka. Summavektoriks on see rööptahuka diagonaal, mis lähtub liidetavate vektorite ühisest alguspunktist.**

Kui meil on tegemist kahe vektoriga, mille koordinaadid on teineteise vastandarvud, siis neid vektoreid nimetatakse teineteise **vastandvektoriteks.** *Vektor ja tema vastandvektor on ühepikkused, samasihilised, kuid suunalt vastupidised. Vektori $\vec{a}$ vastandvektorit tähistatakse $-\vec{a}$.*

Näide 8.

Vektorid $\vec{a} = (2; 3; 4)$ ja $\vec{b} = (-2; -3; -4)$ on teineteise vastandvektorid, sest nende vektorite vastavad koordinaadid on vastandarvud.

Vektori $\vec{a}$ ja tema vastandvektori $-\vec{a}$ liitmisel saame **nullvektori** $\vec{0}$.

Nii nagu tasandil, nii ka ruumis tähendab vektori lahutamine selle vektori vastandvektori liitmist:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

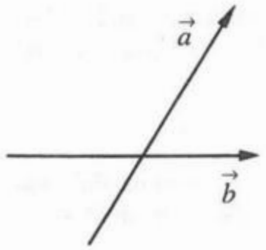
Koordinaatkujul antud vektorite $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ ja $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ puhul tuleb nende vektorite vahe $\vec{a} - \vec{b}$ koordinaatide leidmiseks esimese vektori koordinaatidest lahutada teise vektori vastavad koordinaadid:

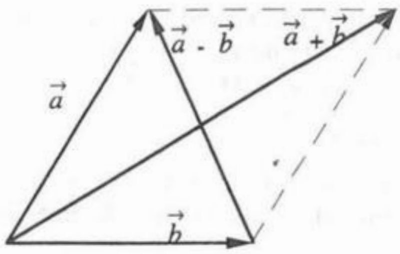
$$\boxed{\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2;\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2)}$$

Näide 9.

Lahutame vektorist $\vec{a} = (5;4;3)$ vektori $\vec{b} = (3; 2; 1)$.
Viimase valemi tõttu
$\vec{a} - \vec{b} = (2; 2; 2)$.

Kahe vektori vahe geomeetriliseks leidmiseks võime kasutada ka rööpkülikureeglit: *kui vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ alguspunktist lähtuv diagonaal on nende vektorite summa, siis teine diagonaal on vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vahe* (vt joonist).





Kui vektorit $\vec{a}$ korrutada mingi reaalarvuga r, siis vektori $\vec{a}$ koordinaadid korrutatakse arvuga r. Vektori $r\vec{a}$ pikkuse saame, kui korrutame vektori $\vec{a}$ pikkuse arvu r absoluutväärtusega.

Kui arv $r > 0$, siis on vektorid $\vec{a}$ ja $r\vec{a}$ samasuunalised (tähistatakse $\vec{a} \uparrow\uparrow r\vec{a}$), kui aga $r < 0$, siis on vektorid $\vec{a}$ ja $r\vec{a}$ vastassuunalised (tähistatakse $\vec{a} \uparrow\downarrow r\vec{a}$).

Näiteks vektorite $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (2; 4; 6)$ ja $\vec{c} = (-3; -6; -9)$ korral on vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ samasuunalised. Vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{c}$ on vastassuunalised, samuti ka vektorid $\vec{b}$ ja $\vec{c}$.

6. VEKTORITE KOLLINEAARSUS

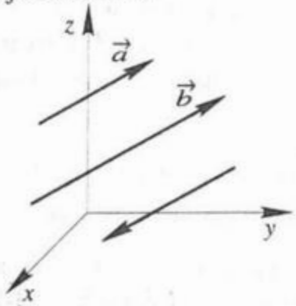
Kahte tasandi vektorit $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ nimetatakse kollineaarseteks ehk samasihilisteks, kui leidub selline nullist erinev reaalarv r, mille korral kehtib võrdus

$\vec{a} = r\vec{b}$.

Kui vektorid on antud koordinaatkujul $\vec{a} = (x_1; y_1)$ ja $\vec{b} = (x_2; y_2)$, siis kollineaarsete vektorite korral kehtib võrdus

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}.$$

Kehtib ka vastupidine järeldus, *kui kahe vektori vastavad koordinaadid on võrdelised, siis need vektorid on kollineaarsed.*
Minnes nüüd tasandi vektoritelt üle ruumivektoritele võib öelda, et vektorite kollineaarsuse definitsioon jääb kehtima.



Kahte ruumivektorit $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ nimetatakse kollineaarseteks, kui leidub selline nullist erinev reaalarv r, mille korral kehtib võrdus

$\vec{a} = r\vec{b}$.

Kui vektorid on antud koordinaatkujul $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ ja $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, siis võrdusest $\vec{a} = r\vec{b}$ järeldub, et kehtib järgmine võrduste ahel

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = r.$$

Seega *kollineaarsete ruumivektorite vastavad koordinaadid on võrdelised.*

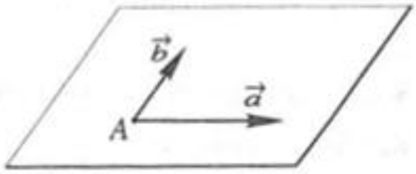
Kehtib ka vastupidine: *kahe ruumivektori vastavate koordinaatide võrdelisusest järeldub nende vektorite kollineaarsus.*

Seega $\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$.

Nullvektori $\vec{0}$ kohta öeldakse, et ta on kollineaarne iga vektoriga ruumis. Nullvektori suund ei ole määratud.

7. VEKTORITE KOMPLANAARSUS

Valime tasandilt mingi punkti A ja kaks mittekollineaarset vektorit $\vec{a}$ ja $\vec{b}$. Sel juhul asub sellel tasandil ka nende vektorite summa $\vec{a}+\vec{b}$. Vektoreid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ nimetatakse ka tasandi **rihivektoriteks**. Nende vektorite kaudu on avaldatav tasandi iga vektor.



Vektoreid, mis asuvad **ühel ja samal tasandil või paralleelsetel tasanditel, nimetatakse komplanaarseteks**

Kasutades rihi mõistet võib öelda, et **komplanaarsed vektorid kuuluvad ühte ja samasse rihti**.

Teoreem. Kolm vektorit on komplanaarsed siis ja ainult siis, kui nende vektorite koordinaatidest moodustatud kolmerealine determinant võrdub nulliga.

Seega vektorite $\vec{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\vec{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$ ja $\vec{c} = (x_3;\ y_3;\ z_3)$ komplanaarsuse kontrollimiseks tuleb arvutada determinandi

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$ väärtus.

Kui determinandi väärtus on nullist erinev, siis vektorid $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ on **mittekomplanaarsed vektorid**.

8. RUUMIVEKTORITE SKALAARKORRUTIS

Varasemast teame, et **kahe vektori $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ skalaarkorrutiseks nimetatakse nende vektorite pikkuste ja vektorite vahelise nurga koosinuse korrutist.**

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha.}$$

See definitsioon kehtib nii tasandi- kui ka ruumivektorite korral.

Kui vektorite vaheline nurk $\alpha = 0°$, siis $\cos\alpha = 1$ ja $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|v|$.

Kui $\alpha = 180°$, siis $\cos\alpha = -1$ ja $\vec{u}\cdot\vec{v} = -|\vec{u}|\cdot|v|$.

Kui $\alpha = 90°$, siis $\cos\alpha = 0$ ja $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

Seega

- *Samasuunaliste vektorite skalaarkorrutis võrdub vektorite pikkuste korrutisega.*
- *Vastassuunaliste vektorite skalaarkorrutis võrdub vektorite pikkuste korrutise vastandarvuga.*
- *Ristuvate vektorite skalaarkorrutis on null.*

Vektorite skalaarkorrutis $\vec{u}\cdot\vec{v}$ on null ka siis, kui vähemalt üks vektoreist $\vec{u}$ või $\vec{v}$ on nullvektor.

Vektori $\vec{u}$ skalaarkorrutist iseendaga nimetatakse selle vektori **skalaarruuduks** ja tähistatakse $(\vec{u})^2$ või $\vec{u}^2$.

$\vec{u}\cdot\vec{u} = |\vec{u}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos 0° = |\vec{u}|\cdot|\vec{u}| = |\vec{u}|^2$.

Vektori skalaarruut on võrdne vektori pikkuse ruuduga.

Kahe vektori skalaarkorrutis võrdub nende vektorite vastavate koordinaatide korrutiste summaga.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z.$$

Kahe vektori skalaarkorrutist võib kasutada vektorite vahelise nurga määramisel. Olgu vektorite $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ vaheline nurk α. Võrdusest $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha$ saab avaldada $\cos\alpha$:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}.}$$

Kahe vektori vahelise nurga koosinus võrdub nende vektorite skalaarkorrutise ja pikkuste korrutise suhtega.

Asendades viimasesse valemisse vektorite $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ koordinaadid, saame valemi

$$\cos\alpha = \frac{u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}.$$

Näide 10.

Leiame vektorite $\vec{a} = (5; -1; -7)$ ja $\vec{b} = (5, -4; -3)$ skalaarkorrutise ja nurga vektorite vahel.

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 5\cdot5 + (-1)\cdot(-4) + (-7)\cdot(-3) = 50.$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{50}{\sqrt{5^2+(-1)^2+(-7)^2}\sqrt{5^2+(-4)^2+(-3)^2}} = \frac{50}{\sqrt{75}\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \approx 0{,}8165.$$

Siit $\varphi = 35°16'$.