Vektorite vektorkorrutis

Olgu antud vektorid:

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1),$$
$$\vec{b} = (x_2, y_2, z_2).$$

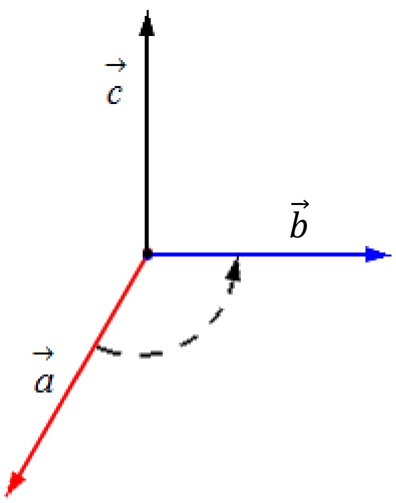
Need vektorid olgu erineva sihiga vektorid, kusjuures kumbki nendest ei ole nullvektor. Paneme need vektorid lähtuma ühesta ja samast punktist ning ehitame nendele rööpküliku. Tähistame vektorite vahelist nurka φ.

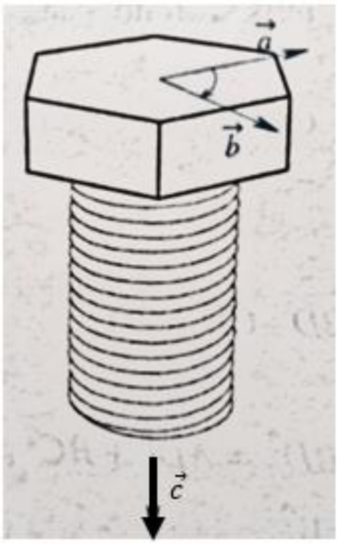
Moodustame vektori $\vec{c}$ järgmiselt:

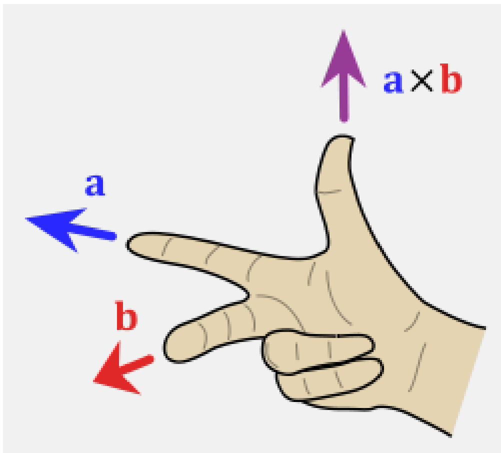
Siht. Vektor $\vec{c}$ on risti vektoritega $\vec{a}$ ja $\vec{b}$, ning seega ka tasandiga millel asub vektroite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ poolt moodustatud rööpkülik.

Suund. Kui meie pöörame vektori $\vec{a}$ vektori $\vec{b}$ poole kui krivi pead, siis vektori $\vec{c}$ suund ühtib kruvi kulgeva liikumise suunaga. *Märkus: Tegemist on tavalise, ehk parema käe kruviga. Vaatame ülalt parema käe kruvi*

Vektrorite $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ kohta öeldakse, et nad moodustavad parema käe kolmiku.







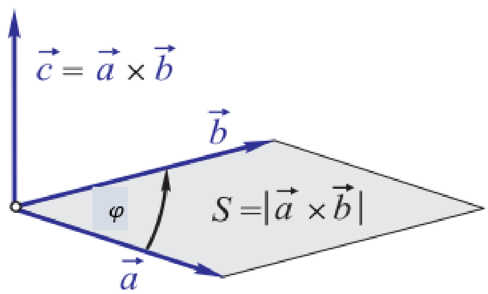
Pikkus. Vektori $\vec{c}$ pikkuseks võetakse vektoritele $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ehitatud rööpküliku pindala. Et rööpküliku pindala on võrdne tema kahe külje ja nendevahelise nurga siinuse korrutisega, siis $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$.

Arvestades eespool öeldu, defineerime kahe vektori vektorkorritise.

Definitsioon. Kahe vektori $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ **vektorkorrutiseks** $\vec{a} \times \vec{b}$ nimetatakse kolmandat vektorit $\vec{c}$, millel on järgmised omadused:

- vektori $\vec{c}$ ***pikkus*** võrdub vektoritele $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ehitatud rööpküliku pindalaga, st

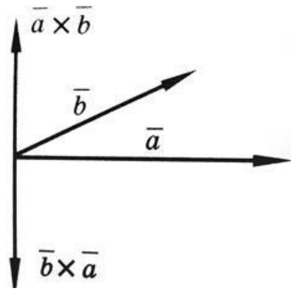
$$\boxed{|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi}$$



- vektori $\vec{c}$ ***siht*** on risti nii vektori $\vec{a}$ kui ka vektori $\vec{b}$ sihiga, st
  $\vec{c} \perp \vec{a}$ ja $\vec{c} \perp \vec{b}$;
- vektori $\vec{c}$ ***suund*** on määratud nn paremakäe kruvi reegliga.

Märkus: Vektorkorrutist tähistatakse ka $[\vec{a}, \vec{b}]$

Vektorkorrutise omadused:



Omadus 1.

Tegurite järjekorra muutumisel muutub vektorkorrutise märk vastupidiseks:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \text{ (vt joonist)}$$

Kui muuta vektorkorrutises tegurite järjekorda, siis saame vektori $\vec{a} \times \vec{b}$ asemel vektori $\vec{b} \times \vec{a}$. Seega pöördesuund muutub vastupidiseks ja järelikult ka vektorkorrutise vektori suund muutub vastupidiseks.

Omadus 2.

Vektorid on kollineaarsed, kui nende vektorkorrutis on null.

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0, \text{ kui } \vec{a} = \vec{0} \text{ või kui } \vec{b} = \vec{0} \text{ või } \vec{a} \parallel \vec{b}$$

Omadus 3.

$$\lambda(\bar{a} \times \bar{b}) = (\lambda \bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\lambda \bar{b}).$$

Omadus 4.

$$(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}.$$

Omadus 5.

$$\text{kui } \vec{a} \perp \vec{b}, \text{ siis } |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

Vektorkorrutis koordinaatides

Kahe ruumivektori $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$ vektorkorrutis avaldub kolmerealise determinandiga

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}}$$

ehk

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k}}$$

ehk

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)}$$

Vektorite kollineaarsuse korral:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}) \Leftrightarrow \bar{a}||\bar{b}$$

Näide 1.

Leida vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vektorkorrutis, kui

$\bar{a} = (6; 7; 10)$ ja $\bar{b} = (8; 5; 9)$

Lahendus:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 6 & 7 & 10 \\ 8 & 5 & 9 \end{vmatrix} = \bar{\imath}\begin{vmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} - \bar{\jmath}\begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{\imath}(7 \cdot 9 - 5 \cdot 10) - \bar{\jmath}(6 \cdot 9 - 8 \cdot 10) + \bar{k}(6 \cdot 5 - 8 \cdot 7) =$$

$$= 13\bar{\imath} + 26\bar{\jmath} - 26\bar{k} = (13; 26; -26)$$

Näide 2.

Leida vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vektorkorrutise pikkus ,kui

1) $|\bar{a}| = 2, \quad |\bar{b}| = 3, \quad \angle(\bar{a}; \bar{b}) = \frac{\pi}{3}$

2) Leida vektorritele $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ehitatud rööpküliku pindala

Lahendus:

1) $|[\bar{a} \times \bar{b}]| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\angle(\bar{a}; \bar{b}) = 2 \cdot 3 \cdot \sin\frac{\pi}{3} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

2) $S = |[\bar{a} \times \bar{b}]| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\angle(\bar{a}; \bar{b}) = 2 \cdot 3 \cdot \sin\frac{\pi}{3} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

Näide 3.

Leida kolmnurga ABC pindala, kui

$A(2,2,2)$, $B(4,0,3), C(0,1,0)$.

Lahendus:

$\overline{AC} = (0-2; 1-2; 0-2) = (-2; -1; -2)$;

$\overline{AB} = (4-2; 0-2; 3-2) = (2; -2; 1)$.

Leiame vektorkorrutise

$$\overline{AC} \times \overline{AB} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \bar{\imath}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \bar{\jmath}\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= -5\bar{\imath} - 2\bar{\jmath} + 6\bar{k}.$$

Leiame vektori $\overline{AC} \times \overline{AB}$ pikkuse:

$|\overline{AC} \times \overline{AB}| = \sqrt{25+4+36} = \sqrt{65} \mapsto S_\Delta = \frac{\sqrt{65}}{2}$ ühikut ruudus.

Näide 4.

Leida rööpküliku pindala, kui rööpkülik on ehitatud vektoritele

$\bar{a}+3\bar{b}, 3\bar{a}+\bar{b}$, ning kui

$|\bar{a}|=|\bar{b}|=1$ ning vektorite $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ vaheline nurk on 30^0.

Lahendus

$$(\bar{a}+3\bar{b})\times(3\bar{a}+\bar{b})=3\bar{a}\times\bar{a}+\bar{a}\times\bar{b}+9\bar{b}\times\bar{a}+3\bar{b}\times\bar{b}=-\bar{b}\times\bar{a}+9\bar{b}\times\bar{a}$$
$$=8\bar{b}\times\bar{a}$$

$$S=8|\bar{b}||\bar{a}|sin30^0=4$$

Näide 5.

Leida rööpküliku pindala, kui rööpkülik on ehitatud vektoritele

$\bar{a}=6\bar{p}-\bar{q}$ ja $\bar{b}=\bar{p}+5\bar{q}$ ning $|\bar{p}|=\frac{1}{2}, |\bar{q}|=4, (\bar{p}\hat{}\bar{q})=\frac{5\pi}{6}$.

Lahendus:

$$S=|(6\bar{p}-\bar{q})\times(\bar{p}+5\bar{q})|=|6\bar{p}\times\bar{p}+6\bar{p}\times5\bar{q}-\bar{q}\times\bar{p}-\bar{q}\times5\bar{q}|$$
$$=|0+30\bar{p}\times\bar{q}-\bar{q}\times\bar{p}-0|=|30\bar{p}\times\bar{q}+\bar{p}\times\bar{q}|$$
$$=31|\bar{p}||\bar{q}|sin(\bar{p}^{\bar{q}})=31\cdot\frac{1}{2}\cdot4\cdot sin\frac{5\pi}{6}=31\cdot2\cdot\frac{1}{2}=31$$