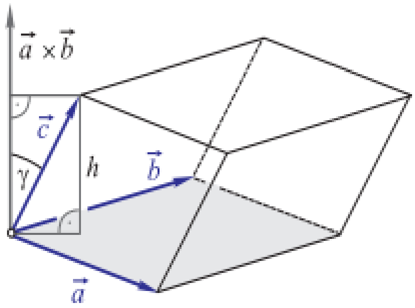
Vektorite segakorrutis

Olgu antud kolmvektorit $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$. Kui need vektorid lähtuvad õhest punktsist, siis nad on ühe rööptahuka servadeks.

Definitsioon. Skalaarkorrutist $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ nimetatakse $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ **segakorrutiseks**.

Mittekomplanaarsete vektorite $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ segakorrutise absoluutväärtus on arvuliselt võrdne neile ehitatud rööptahuka ruumalaga:

$$\boxed{V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|}$$



Segakorrutises tuleb alati enne leida vektorkorrutis ja seejärel skalaarkorrutis.

Segakorrutis on skalaar, mitte vektor.

Segakorrutis koordinaatides

Olgu antud kolm vektorit $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$.

Kolme vektori segakorrutis avaldub determinandiga, mille ridadeks on tegurite koordinaadid:

$$\boxed{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}$$

Kolmele ühest punktist väljuvale vektorile ehitatud rööptahuka ruumala avaldub nimetatud kolme vektori segakorrutise absoluutväärtusega.

$$\boxed{V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = \left\| \begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{matrix} \right\|}$$

Definitsioon. Vektoreid, mis asuvad ühel ja samal tasemel või paralleelsetel tasanditel nimetatakse komplanaarseteks (ladina keeles *com*- sama, *planum* - tasand).

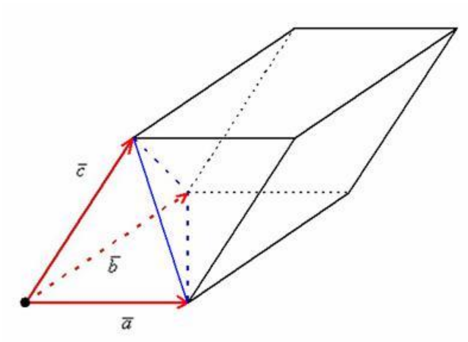
Segakorrutise abil saab kontrollida, kas kolm vektorid on komplanaarsed, s. t paralleelsed ühe ja sama tasandiga. Et komplaarsete vektorite poolt moodustatud rööptahuka ruumala on võrdne nulliga, siis

komplanaarsete vektorite segakorrutis on null, seega vektorite $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ komplanaarsuse tingimuseks on

$$\boxed{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0}$$

Ruumi vektoritele $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ ehitatud **tetraeedri** ruumala on

$$V = \frac{1}{6}\left|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\right| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{matrix}\right\|$$



Segakorrutist tähistatakse ka $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Segakorrutie korral kehtib

$$\boxed{\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}$$

Näide 1.

Olgu antud vektorid $\vec{a} = (3,1,2), \vec{b} = (2,2,3), \vec{c} = (1,3,1)$.
Leida neile ehitatud rööptahuka ruumala.

Lahendus:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 3 + 12 - 4 - 27 - 2 = 21 - 33 = -12$$

V = 12 kuupühikut

Näide 2.

On antud vektorid $\vec{a}(1; -1; 2), \vec{b}(0; 4; 3), \vec{c}(3; 2; -6)$.

Leida

a) segakorrutis;
b) vektoritele ehitatud rööptahuka ruumala;
c) vektoritele ehitatud tetraeedri ruumala.

Lahendus:

a)

$$p = (\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (-24 - 6) + 3 \cdot (-3 - 8) = -30 - 33 = -63$$

b) $V = |p| = |-63| = 63$; c) $V = \frac{1}{6} \cdot |p| = \frac{1}{6} \cdot |-63| = \frac{63}{6} = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}$

Näide 3.

Leida kolmnurkse püramiidi ruumala, kui on antud püramiidi tipud:

$A(-2; -2; 0), B(0; 4; -1), C(1; 2; 1), D(-13; 8; 11)$

$\overline{AB} = (0 - (-2); 4 - (-2); -1 - 0) = (2; 6; -1);$

$\overline{AC} = (1 - (-2); 2 - (-2); 1 - 0) = (3; 4; 1);$

$\overline{AD} = (-13 - (-2); 8 - (-2); 11 - 0) = (-11; 10; 11).$

Lahendus: Leiame segakorrutise:

$$p = (\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -11 & 10 & 11 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 10 & 11 \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -11 & 11 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -11 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (44 - 10) - 6 \cdot (33 + 11) - (30 + 44) = 68 - 264 - 74 = -270$$

Seega püramiidi ruumala on

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot |p| = \frac{1}{6} \cdot |-270| = 45$$