

Funktsiooni esitusviisid

Funktsioone saab esitada tabelina, graafikuna ja analüütiliselt.

- 1) tabeli abil
- 2) arvupaaridena
- 3) graafiku abil
- 4) analüütiliselt (valemi abil)
- 5) nooldiagrammina
- 6) sõnalise formuleeringu abil

1. **Esitusviis tabeli kujul.** Funktsiooni argumendi võimalikud väärtused esitatakse tabeli ühes reas (veerus) ja neil vastavad funktsiooni väärtused tabeli teises reas (veerus). On võimalik vaid siis, kui funktsiooni **argumendil on lõplik arv väärtusi**. Sellist esitusviisi kaustatakse sageli eksperimentaalsete tulemuste märkimiseks.

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

Näide 1. Eksperimendi käigus saadud tulemused auto sõidukiiruse ja bensiinikulu vahel on esitatud tabelis:

Kiirus km/h	30	60	80	100	120
Bensiini kulu l	11	9	10	11	12

2. **Funktsiooni esitusviis arvupaaride abil.**

Kõikvõimalikud järjestatud arvupaarid, milles esimesel kohal on argumendi väärtus ja teisel kohal sellele vastav funktsiooni väärtus.

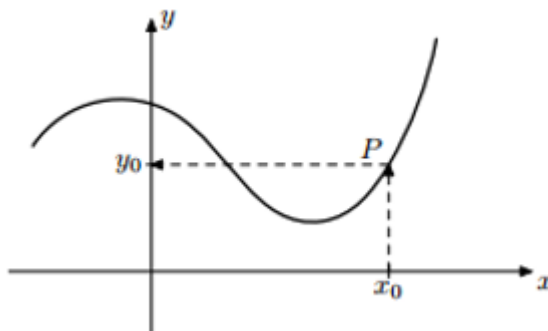
Näide 2. Antud funktsioon $y = |x|$, kus $X = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$. See funktsioon avaldub arvupaaridena järgmiselt:

$$\{(-2; 2), (-1; 1), (0; 0), (1; 1), (2; 2)\}$$

3. **Graafiline esitus**

Funktsiooni f graafikuks on joon, mille võrrand on $y = f(x)$.

Funktsiooni graafikuks saab olla vaid selline joon, mille korral igale x väärtusele vastab vaid üks punkt sellel joonel.



Funktsiooni esitusviis graafikuna

Argumendi väärtusele x_0 vastab graafiku punkt P . Selle punkti ordinaat y_0 on üheselt määratud, seega igale argumendi x väärtusele seab graafik vastavuse ühe kindla y väärtuse.

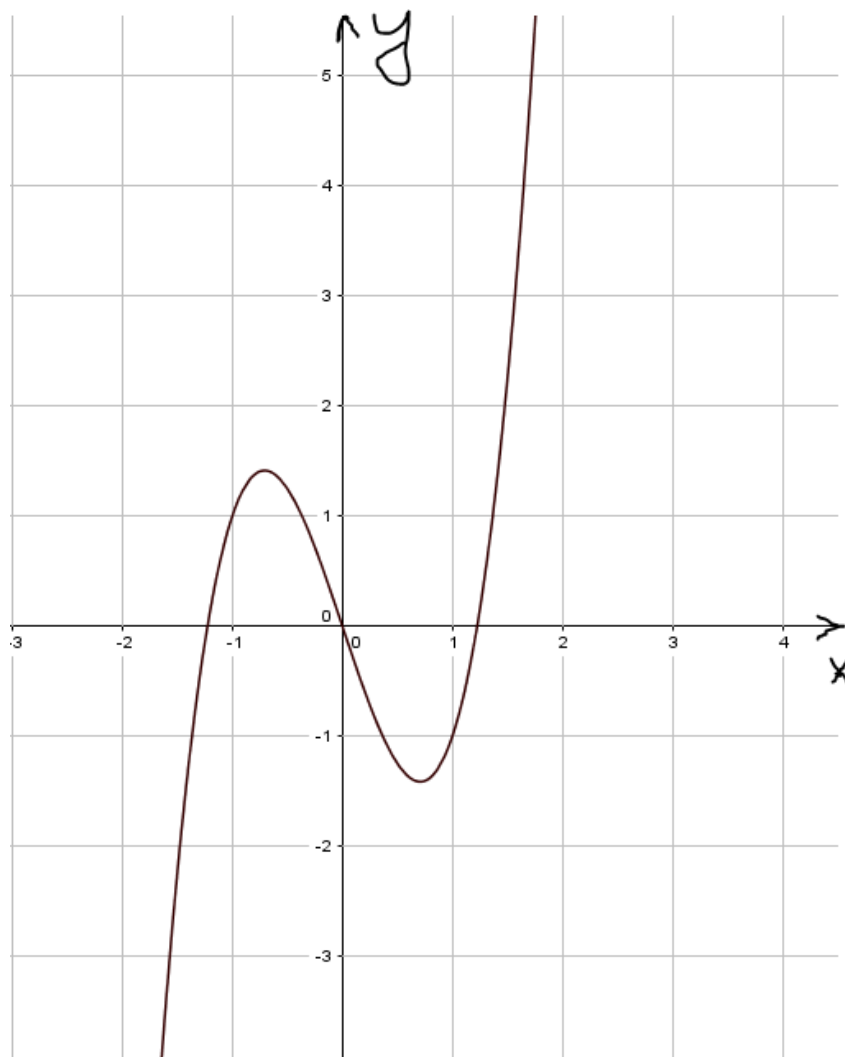
NB! Koordinaatteljestikus võimalik kujutada vaid **osa** graafikust.

Graafik võib koosneda kas üksikutest punktides, pidevast joonest või mitmest pidevast joonest.

Graafik

- võimaldab funktsiooni kujutada piltlikumalt;
- funktsiooni mitmed omadused selgemini nähtavad kui valemist;
- eksperimentaalteadustes väga levinud seoste esitamisviis.

Näide 3. Joonisel on funktsiooni $g(x) = 2x^3 - 3x$ graafik.



4. *Analüütiline esitus.*

Antakse võrdus (valem), mille kohaselt

- on vastavalt x väärtusele võimalik arvutada y väärtust;
- on arusaadav milliseid tehteid ja millises järjekorras tuleb argumenti x väärtusega teha, et saada vastav funktsiooni väärtus y .

Funktsiooni valemina esitus on seni **kõige enim kasutatav funktsiooni esitusviis.**

a) *Funktsiooni ilmutatud kuju*

Esitatakse valemiga $y = f(x)$, mis näitab, millised tehteid tuleb sooritada argumentiga, et saada funktsiooni väärtus. Sisuliselt kujutab valem funktsiooni graafiku võrrandit. Näiteks avaldis

$$y = x^2, \quad x \in [0, 1]$$

kirjeldab funktsiooni, mille määramispiirkonnaks on lõik $[0, 1]$ ja iga x korral sellelt lõigult arvutatakse argumentidele x vastavad funktsiooni väärtused $f(x)$ vastavalt valemile $f(x) = x^2$.

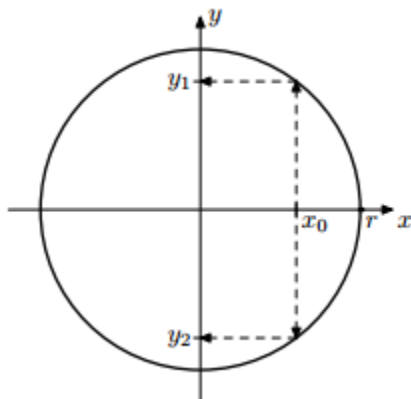
Analüütiliselt antud funktsiooni loomulikuks määramispiirkonnaks nimetatakse argumentide kõigi nende väärtuste hulka mille korral funktsiooni avaldis on täielikult määratud. Näiteks ülaltoodud funktsioon $y = x^2, x \in [0, 1]$ ei ole antud oma loomulikus määramispiirkonnas. Selle funktsiooni loomulik määramispiirkond on $X = \mathbb{R}$.

Funktsioon esitatakse ilmutatud kujul võrdusena $y = f(x)$, kus vasakul pool võrdusmärgi on y ja paremal mingisugune analüütiline avaldis muutuja x suhtes. Ilmutatud kujul on kõik põhilised elementaarfunktsioonid: ruutfunktsioon $y = x^2 - 2x + 3$, trigonomeetrilised funktsioonid, eksponent- ja logaritmifunktsioonid jne.

b) Funktsiooni ilmutamata kuju

Kui võrrand $F(x, y) = 0$ määrab iga $x \in X$ korral arvu y , siis öeldakse, et ta määrab funktsiooni $f(x, y), x \in X$ ilmutamata kujul.

Näide . Ilmutamata kujul on funktsioon $x^2 + y^2 = r^2$, kus r on positiivne konstant. Selle funktsiooni graafikuks on ringjoon keskpunktiga koordinaatide alguses, raadiusega r . Selle funktsiooni ilmutamiseks, st tei-



sendamiseks ilmutatud kujule, avaldame võrdusest muutuja y . Kõigepealt $y^2 = r^2 - x^2$, millest $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. Igale x väärtusele vahemikust $(-r; r)$ vastab kaks muutuja y väärtust. Joonisel vastab argumentidele x_0 väärtusele kaks y väärtust $y_1 = \sqrt{r^2 - x_0^2}$ ja $y_2 = -\sqrt{r^2 - x_0^2}$. Seega on antud juhul tegemist kahese funktsiooniga. Funktsioonid $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ ja $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ on selle kahese funktsiooni ühesteks harudeks. Kui ilmutamata kujul esitatud funktsiooni graafikuks on kogu ringjoon, siis funktsiooni $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ graafikuks on ringjoone ülemine pool ja funktsiooni $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ graafikuks ringjoone alumine pool.

c) **Funktsiooni parameetiline kuju

Kolmandaks funktsiooni analüütiliseks esitusviisiks on funktsiooni parameetiline esitusviis. Parameetrilise esitusviisi korral ei ole kaks muutujat x ja y omavahel otseselt võrdusega seotud, vaid on seotud läbi kolmanda muutuja, nn parameetri t . Parameetrilise esitusviis on üldjuhul

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

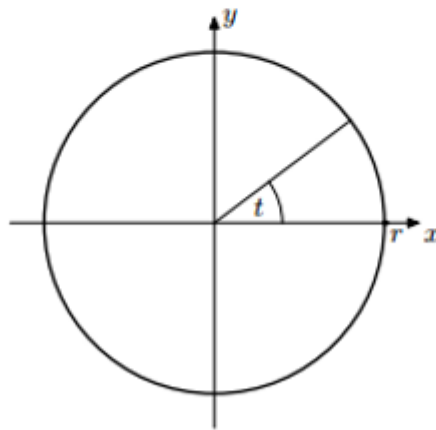
Parameetrilisel kujul on võimalik esitada kõiki funktsioone. Funktsiooni $y = x^2$ parameetriliseks esitusviisiks on

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$$

Funktsiooni $x^2 + y^2 = r^2$ parameetriliseks esitusviisiks on

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}$$

Selles esitusviisis on parameetrik t joonisel näidatud nurk.



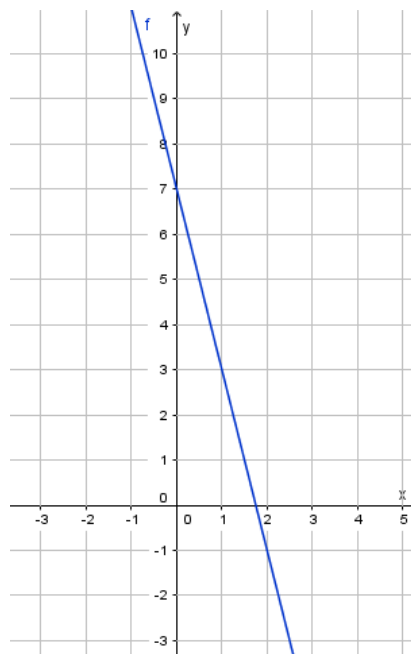
Parameetri t tähendus

Näide 4.

Esitada graafiliselt $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - 4t \end{cases} \quad t \in R.$

Lahendus. Anname parameetritele t suvalised väärtused, x ja y sõltuvad meie valikust:

t	x	y
-2	0	7
-1	1	3
0	2	-1
1	3	-5



Näide 5.

Esitada funktsioon $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - 4t \end{cases} \quad t \in R$ ilmutatud kujul

Lahendus. Avaldame esimesest võrrandist t : $t = x - 2$.

Asendame saadud avaldis teisse võrrandisse $y = -1 - 4(x - 2) = -4x + 7$

Vastus. $y = -4x + 7$

Funktsiooni $y = x^2$ parameetrilist esitusviisi tavaliselt ei kasutata, sellel puudub mõte. Küll aga kasutatakse funktsiooni $x^2 + y^2 = r^2$ parameetrilist esitusviisi.

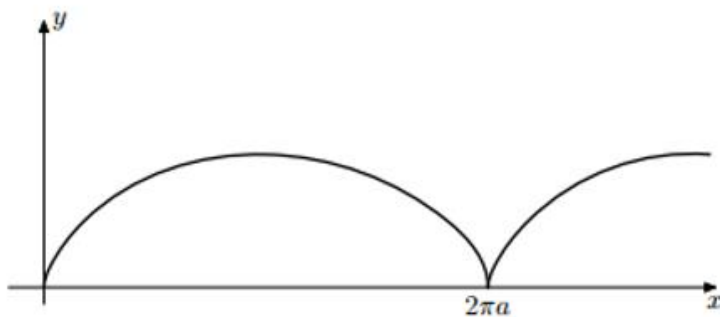
On funktsioone, millele ainsaks mõistlikuks esitusviisiks on parameetriline esitusviis.

Näide 6.

Vaatleme parameetrilisel kujul esitatud funktsiooni

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

Funktsiooni graafikuks on tsükliline joon, mida nimetatakse tsükloidiks. Tsükloid on joon, mille kirjeldab ringjoone raadiusega a üks punkt, mis



Joonis Tsükloid

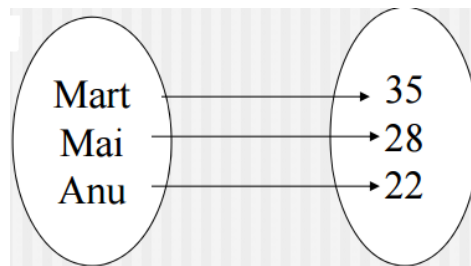
algasendis asub koordinaatide alguspunktis, kui panna ringjoon veerema mööda x -telge. Sellisel juhul on funktsiooni parameetrilises esitusviisis parameetriks t selle ringjoone pöördenurk algasendi suhtes.

5. Nooldiagramm

- Esitatakse funktsioon kahe hulkana, millest üks neist kujutab funktsiooni määramispiirkonda, teine muutumispiirkonda.
- Seoseid hulkade vahel kujutatakse noolte abil.
- Argumendi igale väärtusele vastab funktsiooni väärtus.
- Funktsiooni väärtusi on iga argumendi väärtuse jaoks vaid üks.
- Hulga X iga elemendi juurest peab lähtuma täpselt üks nool (vt Näidet 7).

Näide 7.

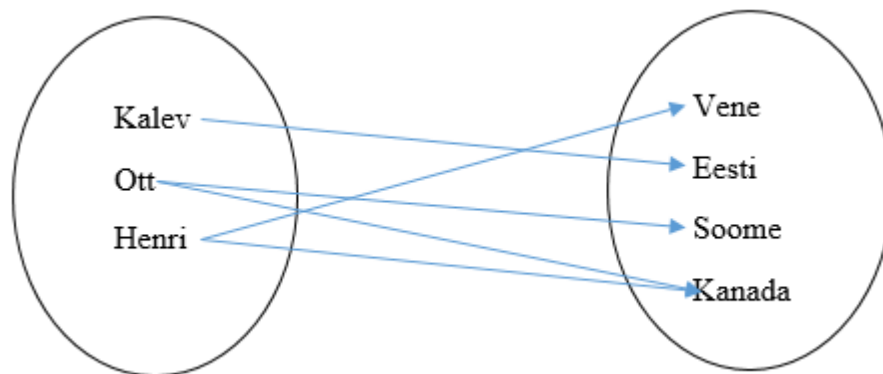
Igal inimesel on teatav vanus. Seega igale inimesele saame vastavusse seada **ühe** arvu – tema vanuse. Inimese “vanus” on funktsioon, mille määramispiirkonnaks on inimeste hulk ja muutumispiirkonnaks arvude hulk.



Näide 8.

Olgu määramispiirkonnaks inimeste hulk ja muutumispiirkonnaks riikide hulk.

Kas “kodakondsus” on funktsioon? Kodakondsus ei ole funktsioon, sest leidub inimesi, kellel on mitme riigi kodakondsus, kuid on ka kodakondsuseta isikuid.



6. Sõnaline formuleering

Leidub selliseid funktsioone, mille graafikut pole võimalik esitada. Näiteks,

- Dirichlet funktsioon

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \text{ on ratsionaalarv} \\ 0, & \text{kui } x \text{ on irratsionaalarv} \end{cases}$$

- arvu x täisosa on suurim täisarv, mis ei ületa arvu x .

KOKKUVÕTE

- enim kasutatav funktsiooni esitusviis on valem;
- mõnikord polegi funktsiooni esitamiseks muud võimalust peale tabeli;
- graafiku konstrueerimisel on saadud tulemus sageli ebatäpne, mistõttu lisatakse graafikule ka see reegel, mille abil leitakse need graafiku punktid (e. valem),
- leidub funktsioone, mille graafikut pole võimalik esitada.
- kooskasutamine: **valem, tabel, graafik.**