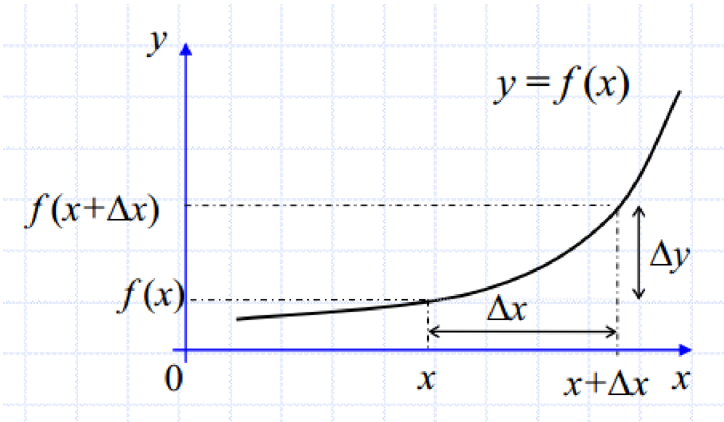
Funktsiooni tuletise mõiste

Olgu antud funktsioon $y = f(x)$. Fikseerime selle funktsiooni määramispiirkonnas uhe vabalt valitud punkti x. Lähtudes sellest fikseeritud väärtusest, suurendame **argumenti x muudu** Δx võrra. Argumendi muudu võrra erinevas punktis on argumendi väärtuseks $x + \Delta x$. Funktsiooni väärtus selles punktis on $f(x + \Delta x)$. Funktsiooni väärtus muutub $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ võrra. Suurust Δy nimetatakse argumendi muudule Δx vastavaks **funktsiooni muuduks**.

Definitsioon. Funktsiooni muudu ja argumendi muudu suhte piirväärtust argumendi muudu lähenemisel nullile nimetatakse **funktsiooni tuletiseks** kohal x ja tähistatakse $f'(x)$.

Seega definitsiooni kohaselt

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$



Kuna funktsiooni muut $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, siis

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Funktsiooni tuletise **tähised** on y', $f'(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df(x)}{dx}$, $\dfrac{df}{dx}$.

Vahel peab ka eraldi juurde märkima, et tuletis on võetud kohal x ehk öeldakse “x järgi” ja kirjutatakse y'_x.

Definitsioon. Funktsiooni, millel on olemas tuletis kohal x, nimetatakse **diferentseeruvaks** kohal x.

Funktsiooni tuletise võtmist nimetatakse ka **funktsiooni diferentseerimiseks**. Diferentsiaalarvutuse lõid 17. sajandil saksa matemaatik ja filosoof **G. W. Leibnitz** ning inglise matemaatik ja füüsik **I. Newton.**

** Järgnevalt näitame, kuidas saab kasutada funktsiooni tuletise definitsiooni mistahes **funktsiooni <u>tuletise leidmiseks.</u>** Selleks kasutatakse järgmist **skeemi**:

1° avaldada $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$,

2° moodustada $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$,

3° leida $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Näide*

Leia funktsiooni $y = x^2 + 3x$ tuletis, kasutades tuletise definitsiooni.
Lahendus:

$$1.\ \text{samm}:\quad \Delta y = (y+\Delta y) - y = (x+\Delta x)^2 + 3(x+\Delta x) - (x^2+3x) =$$
$$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3x + 3\Delta x - x^2 - 3x =$$
$$= 2x\Delta x + 3\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$2.\ \text{samm}:\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + 3\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x+3+\Delta x)}{\Delta x} =$$
$$= 2x + 3 + \Delta x$$

$$3.\ \text{samm}:\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x+3+\Delta x) = 2x+3$$

Vastus: y’ = 2x + 3

Näide*

Leia funktsiooni $f(x) = \frac{5}{x}$ tuletis kasutades tuletise definitsiooni.
Lahendus:

$$1.\text{samm}:\quad \Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{5}{x+\Delta x} - \frac{5}{x} =$$
$$= \frac{5x - 5x - 5\Delta x}{x(x+\Delta x)} = \frac{-5\Delta x}{x(x+\Delta x)}.$$

$$2.\text{samm}:\quad \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{-5\Delta x}{x(x+\Delta x)\Delta x} = \frac{-5}{x(x+\Delta x)}.$$

$$3.\text{samm}:\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-5}{x(x+\Delta x)} = \frac{-5}{x(x+0)} = -\frac{5}{x^2}.$$

Vastus: $f'(x) = -\frac{5}{x^2}$

Näide*

Leida tuletise definitsiooni põhjal funktsiooni $y = \frac{1}{x^3}$ tuletis.

Lahendus.

$$1°\quad \Delta y = \frac{1}{(x+\Delta x)^3}^{(x^3} - \frac{1}{x^3}^{((x+\Delta x)^3} = \frac{x^3 - (x+\Delta x)^3}{x^3(x+\Delta x)^3} =$$
$$= \frac{x^3 - \left(x^3 + 3x^2\cdot\Delta x + 3x\cdot(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3\right)}{x^3(x+\Delta x)^3} =$$
$$= \frac{\cancel{x^3} - \cancel{x^3} - 3x^2\cdot\Delta x - 3x\cdot(\Delta x)^2 - (\Delta x)^3}{x^3(x+\Delta x)^3} =$$
$$= \frac{\Delta x\left[-3x^2 - 3x\cdot\Delta x - (\Delta x)^2\right]}{x^3(x+\Delta x)^3},$$

2° $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x}\left[-3x^2 - 3x\cdot\Delta x - (\Delta x)^2\right]}{\cancel{\Delta x}\cdot x^3\left(x+\Delta x\right)^3} = \frac{-3x^2 - 3x\cdot\Delta x - (\Delta x)^2}{x^3\left(x+\Delta x\right)^3}$,

3° $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-3x^2 - 3x\cdot\Delta x - (\Delta x)^2}{x^3\left(x+\Delta x\right)^3} = \frac{-3x^2}{x^3\cdot x^3} = -\frac{3}{x^4}$.

Seega kui $y = \frac{1}{x^3}$, siis $y' = -\frac{3}{x^4}$.

Milleks on vajalik kasutada piirväärtuse definitsiooni?

Milleks on vajalik kasutada piirväärtuse definitsiooni? Eespool vaadeldud ülesannets tegelikult tõesti mitte. Matemaatikas **on teada elementaarfunktsioonide tuletised** (nn tuletiste tabel) ja tegelikult **lihtsamal juhul piirväärtuse definitsiooni ei kasutata**. Olukord aga muutub, kui meil **ei ole enam elementaarfunktsioonid**, vaid tegemist on üsna **ettervamatult käituvate funktsioonidega**. Sellisel juhul võib osutuda, et **ainuke võimalus** avaldise uurimiseks on kasutada **piirprotsessi uurimist**. Siinjuures võib välja tuua ka sellise lihtsa põhjuse, et kui tuletiste standardvalemid peaksid **meelest ära minema**, siis tuletise definitsioon **piirväärtuse kaudu** aitab alati (kuigi selle kasutamine võib osutuda pisut keeruliseks)