Funktsiooni tuletiste leidmine

(tuleiste tabel + diferentseerimisreeglid nr 1 ja 4)

Näide 1

Leia funktsiooni $y = 2x^3 + 4x^2 - 5x + 8$ tuletis.

Lahendus:

$$y' = (2x^3)' + (4x^2)' - (5x)' + 8' = 2 \cdot (x^3)' + 4 \cdot (x^2)' - 5 \cdot x' + 8' =$$
$$= 2 \cdot 2x^2 + 4 \cdot 2x - 5 \cdot 1 + 0 = 6x^2 + 8x - 5$$

Näide 2

Leia funktsiooni $y = 2x^5 + 7x^4 - 4x^3 + 10x - 21$ tuletis.

Lahendus:

$y' = (2x^5)' + (7x^4)' - (4x^3)' + (10x) - 21' = 10x^4 + 28x^3 - 12x^2 + 10$.

Leia funktsiooni $y = \frac{1}{x^5}$ tuletis.

Lahendus:

$$y' = \left(\frac{1}{x^5}\right)' = (x^{-5})' = -5x^{-5-1} = -5x^{-6} = -\frac{5}{x^6}.$$

Näide 3

Leia funktsiooni $y = \frac{7}{x^3}$ tuletis.

Lahendus:

$$y' = \left(\frac{7}{x^3}\right)' = (7x^{-3})' = 7(x^{-3})' = 7 \cdot (-3) \cdot x^{-3-1} =$$
$$= -21x^{-4} = -\frac{21}{x^4}.$$

Näide 4

Leia funktsiooni $s = 5t^2 - 4\sqrt{t} + \frac{3}{t}$ tuletis.

Lahendus:

$$s' = (5t^2)' - (4\sqrt{t})' + \left(\frac{3}{t}\right)' = 5 \cdot (t^2)' - 4 \cdot (\sqrt{t})' + 3 \cdot \left(\frac{1}{t}\right)' =$$
$$= 5 \cdot 2t - 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} + 3 \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) = 10t - \frac{2}{\sqrt{t}} - \frac{3}{t^2}$$

Näide 5

Leia funktsiooni $\mathbf{f(x) = x - 4\sqrt{x}}$ tuletis kohal x = 0,01.

Lahendus:

$$f'(x) = \left(x - 4\sqrt{x}\right)' = x' - \left(4x^{\frac{1}{2}}\right)' = 1 - 4 \cdot \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} =$$

$$= 1 - 2x^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}};$$

$$f'(0{,}01) = 1 - \frac{2}{\sqrt{0{,}01}} = 1 - \frac{2}{0{,}1} = 1 - 20 = -19.$$

Näide 6

Leida funktsiooni f tuletis, kui $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$

Lahendus:

$$f'(x) = \left(x^3 + 2x^2 - 3x + 5\right)' = \left(x^3\right)' + \left(2x^2\right)' - (3x)' + (5)' = \left(x^3\right)' + 2 \cdot \left(x^2\right)' - 3 \cdot (x)' + (5)'$$

Nüüd kasutame tuletiste tabelit

$$f'(x) = \left(x^3\right)' + 2 \cdot \left(x^2\right)' - 3 \cdot (x)' + (5)' = 3x^2 + 2 \cdot 2x - 3 \cdot 1 + 0 = 3x^2 + 4x - 3$$

Näide 7

Leida y', kui $y = 2x^3 + \frac{3}{x^4} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x} - \sqrt[3]{x^2}$.

Lahendus. Esitame funktsiooni avaldise liikmed muutuja *x* astmetena

$$y = 2x^3 + 3 \cdot x^{-4} - x^{-\frac{1}{2}} + 2 \cdot \frac{1}{x} - x^{\frac{2}{3}}$$

ja diferentseerime liikmeti, kasutades tuletiste tabelit

$$y' = 2 \cdot 3x^{3-1} + 3 \cdot (-4) x^{-4-1} - \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{1}{2}-1} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} =$$

$$= 6x^2 - 12x^{-5} + \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} - \frac{2}{x^2} - \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} =$$

$$= 6x^2 - \frac{12}{x^5} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{2}{x^2} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \; .$$

Näide 8

Leiame funktsiooni $y=(2x-3)(3x+7)$ **tuletise**

Lahendus:

$$y'=[(2x-3)(3x+7)]'=(6x^2+5x-21)'=6\cdot(x^2)'+5\cdot x'-21'=6\cdot 2x+5\cdot 1-0=12x+5$$

Näide

Leida y', kui $y=3\cdot 2^x+\log_3 x$.

Lahendus. Diferentseerime tuletiste tabelit ja tuletise võtmise reegleid kasutades.

$$y'=3\cdot(2^x)'+(\log_3 x)'=3\cdot 2^x\ln 2+\frac{1}{x\ln 3}\ .$$

Näide 8

Leida funktiooni y tuletis, kui

$$y=6+x+3x^2-\sin x-2\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x^2}-11ctgx$$

Lahendus:

$$y'=\left(6+x+3x^2-\sin x-2\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x^2}-11ctgx\right)'=$$

$$=(6)'+(x)'+(3x^2)'-(\sin x)'-\left(2x^{\frac{1}{3}}\right)'+\left(x^{-2}\right)'-(11ctgx)'=$$

$$=(6)'+(x)'+3(x^2)'-(\sin x)'-2\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'+\left(x^{-2}\right)'-11(ctgx)'=$$

$$=0+1+3\cdot 2x-\cos x-2\cdot\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}+(-2)\cdot x^{-3}-11\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=$$

$$=1+6x-\cos x-\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{2}{x^3}+\frac{11}{\sin^2 x}$$

Näide 9

Leida funktsiooni y tuletis, kui

$$y=2^x-\operatorname{arctg}x$$

Lahendus:

$y'=(2^x-\operatorname{arctg}x)'=(2^x)'-(\operatorname{arctg}x)'$ ehk saame

$$y'=2^x\ln 2-\frac{1}{1+x^2}$$

Näide 10

On antud funktsioon $\mathbf{f(x)=\frac{6x^2}{5\sqrt[3]{x}}}$**. Leia f ’(27).**

Lahendus:

Teisendame antud funktsiooni järgmiselt:

$$f(x)=\frac{6x^2}{5\sqrt[3]{x}}=\frac{6}{5}x^2\cdot x^{-\frac{1}{3}}=\frac{6}{5}x^{2-\frac{1}{3}}=\frac{6}{5}x^{\frac{5}{3}}.$$

Leiame nüüd tuletise

$$f'(x)=\left(\frac{6}{5}x^{\frac{5}{3}}\right)'=\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1}=2x^{\frac{2}{3}}=2\sqrt[3]{x^2}$$

ning nüüd tuletise väärtuse kohal 27. Saame

$$f'(27)=2\sqrt[3]{27^2}=2\cdot 9=18.$$

Vastus: f ‘(27) = 18

Näide 11

Leida funktsiooni f(x) tuletis, kui

$$f(x)=\operatorname{arctg}\,x+2\ln x$$

Lahendus:

Kasutame esimest deferentseerimisreeglit

$$f'(x)=(\operatorname{arctg}\,x+2\ln x)'=(\operatorname{arctg}\,x)'+(2\ln x)'=(\operatorname{arctg}\,x)'+2\cdot(\ln x)'$$

Saame nüüd tuletiste tabeli järgi

$$f'(x)=(\operatorname{arctg}\,x)'+2\cdot(\ln x)'=\frac{1}{1+x^2}+\frac{2}{x}$$