MÄÄRAMATA INTEGRAALI MÕISTE

IDEE - meil on vaja leida funktsioon, mille tuletist me teame.

Olgu antud funktsioon $y = F(x)$, mille tuletis on $f(x)$.

Definitsoon 1:. Funktsiooni f **algfunktsiooniks** nimetatakse funktsiooni F, mille korral $F'(x) = f(x)$.

Näide 1. Funktsioon $\frac{x^4}{4}$ on funktsiooni x^3 algfunktsioon, sest

$$\left(\frac{x^4}{4}\right)' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 = x^3 .$$

Definitsioon 2. Funktsiooni $f(x)$ algfunktsiooni leidmist nimetatakse funktsiooni **integreerimiseks** ning tähistatakse sümboliga

$$\int f(x)dx,$$

kusjuures

- x on **integreerimismuutuja**,
- $f(x)$ - **integraalialune (integreeritav) funktsioon**,
- $f(x)dx$ - **integraalialune avaldis.**

*Matemaatika osa, mis käsitleb funktsioonide integreerimise reegleid, integraali omadusi jms nimetatakse **integraalarvutuseks.**

Definitsiooni põhjal funktsiooni integreerimine ja tuletise leidmine on pöördtehted.

Näide 2.

$$\begin{aligned} (x^3)' = 3x^2 &\quad \Rightarrow \quad \int 3x^2 dx = x^3, \\ (x^3+2)' = 3x^2 &\quad \Rightarrow \quad \int 3x^2 dx = x^3+2, \\ (x^3-1)' = 3x^2 &\quad \Rightarrow \quad \int 3x^2 dx = x^3-1. \end{aligned}$$

On näha, et ühe ja sama funktsiooni integreerimine annab vastused, mis erinevad **konstandi C võrra** (kuna konstandi tuletis on null ja seega osutub, et **algfunktsioon pole üheselt määratud**). Siit järeldub, et

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C$$

Seega, kui on leitud antud funktsiooni $f(x)$ **mingi üks algfunktsioon** $F(x)$, siis iga teine funktsiooni $f(x)$ algfunktsioon avaldub kujul

$F(x) + C$, kus C on suvaline konstant.

Tõepoolest, kui $F'(x) = f(x)$, siis ka $[F(x) + C]' = F'(x) = f(x)$.

Defiitsiooni 2 idee: algfunktsiooni üldavaldist nimetatakse **määramata integraaliks** $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Definitsioon 3. Avaldist kujul $F(x)+C$, kus $F(x)$ on funktsiooni $f(x)$ mingi algfunktsioon ja C on suvaline konstant (*integreerimiskonstant*), nimetatakse funktsiooni $f(x)$ **määramata integraaliks** ja tähistatakse

$$\int f(x)dx$$

s.t. $\int f(x)dx = F(x)+C$, kui $F'(x) = f(x)$

$f(x)$ – integreeritav (integraalialune) funktsioon,

dx – diferentsiaal,

$f(x)dx$ – integreeritav avaldis,

x – integreerimismuutuja.

Viimases definitsioonis **sõna "määramata"** märgib seda, et integraalis on suvaline konstant**.**

INTEGRALLIDE TABEL (integreerimise põhivalemid)

Kuna diferentseerimine ja integreerimine on pöördtehted, saame diferentseerimise põhivalemite abil koostada järgmise integreerimise põhivalemite tabeli.

1) $\int 0\,dx = C$

2) $\int dx = x + C$, $\int k \cdot dx = k \cdot x + C$

3) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$

4) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

5) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

6) $\int e^x dx = e^x + C$

7) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

8) $\int \cos x dx = \sin x + C$

9) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

10) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

11) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

12) $\int \dfrac{dx}{x^2+1} = \arctan x + C$

13. $\int \dfrac{dx}{x \pm a} = \ln|x \pm a| + C$

14. $\int e^{k\cdot x+b}dx=\frac{1}{k}\cdot e^{kx+b}+C$

15. $\int \sin(kx+b)dx=-\frac{1}{k}\cos(kx+b)+C$

16. $\int \cos(kx+b)dx=\frac{1}{k}\sin(kx+b)+C$

17. $\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

18. $\int \frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|+C$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C$

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$

22. $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C$

23. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{2}+C$

Näide 3.

a) $5\int dx=5\cdot x+C$

b) $15\int dy=15\cdot y+C$

c) $a\int db=a\cdot b+C$

d) $\int 3dx=3\int dx=3\cdot x+C$

e) $\int sdq=s\cdot\int dq+C=s\cdot q+C$

f) $\int xdx=\frac{x^{1+1}}{1+1}+C=\frac{x^2}{2}+C$

g) $\int 6x^2dx=6\cdot\int x^2dx=6\cdot\frac{x^{2+1}}{2+1}+C=6\cdot\frac{x^3}{3}+C=2x^3+C$

$$\int(6x^{11}+4x^5-3)dx=\int 6x^{11}dx+\int 4x^5dx-\int 3dx=6\cdot\frac{x^{12}}{12}+4\cdot\frac{x^6}{6}-3\cdot x+C=\frac{x^{12}}{2}+\frac{2x^6}{3}-3x+C$$

h) $\int\frac{2dx}{x^4}=2\int x^{-4}dx=2\cdot\frac{x^{-3}}{-3}+C=-\frac{2}{3x^3}+C$

i) $\int\frac{\sqrt[4]{x}}{3}dx=\frac{1}{3}\int x^{\frac{1}{4}}dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}}+C=\frac{4}{15}\sqrt[4]{x^5}+C$

j) $\int s^2t^3dt=s^2\cdot\frac{t^4}{4}+C=\frac{s^2}{4}t^4+C$

k) $\int z \cdot \sqrt[3]{w} dz = \sqrt[3]{w} \cdot \frac{z^2}{2} + C$

l) $\int \frac{\sqrt{x}}{x^2} dx = \int x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-2} dx = \int x^{\frac{1}{2}+(-2)} dx = \int x^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-1/2} + C = -\frac{2}{\sqrt{x}} + C$

m) $\int \frac{dx}{2x} = \frac{1}{2} \ln|x| + C$

n) $\int \frac{dx}{x+3} = \ln|x+3| + C$

o) $\int 3e^x dx = 3 \cdot e^x + C$

p) $\int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} + C$

q) $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$

r) $\int (\sin x + \cos x) dx = -\cos x + \sin x + C$

s) $\int \sin 4h dh = \frac{1}{4} \cdot (-\cos 4h) + C$

t) $\int \cos 0{,}5 u du = \frac{1}{0{,}5} \cdot \sin 0{,}5u + C = 2 \sin 0{,}5u + C$

u) $\int \frac{2dr}{\cos^2 r} = 2 \tan r + C$

v) $\int \frac{dp}{a \sin^2 p} = \frac{1}{a} \cdot (-\cot p) + C$

w) $\int \frac{da}{a \sin^2 p} = \frac{1}{\sin^2 p} \cdot \ln|a| + C$

x) $\int \frac{4dv}{1+v^2} = 4 \cdot \arctan v + C$

MÄÄRAMATA INTEGRAALI OMADUSI

Omadus 1:

Määramata integraal kahe või mitme funktsiooni algebralisest summast (vahest) võrdub liidetavate integraalide summaga (vahega):

$$\boxed{\int [f_1(x) \pm f_2(x)]\, dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx}$$

Näide 4.

Leida integral $\int \left(x^2 + 2\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right) dx$ vahetu integreerimese teel.

Lahendus: Omaduste 1 ja 2 põhjal same:

$$\int\left(x^2+2\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)dx=\int x^2dx+2\int\sqrt{x}dx-\int\frac{dx}{x}=\frac{x^3}{3}+2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\ln|x|+C=\frac{x^3}{3}+\frac{4}{3}x\sqrt{x}-\ln|x|+C,$$

kus kõigi kolme integraali kohta kirjutasime ühe suvalise konstandi C.

Omadus 2:

Konstantse teguri võib tuua integraalimärgi ette, st kui a on konstant, siis

$$\boxed{\int a\,f(x)dx=a\int f(x)dx}$$

Näide 5.

Leida integraal $\int 2xdx$.

Lahendus: $\int 2xdx=2\cdot\int xdx=2\cdot\frac{x^2}{2}+C=x^2+C$

Definitsioon 4. Funktsiooni määramata integraali leidmist vahetult omaduste 1 ja 2 ning integreerimise põhivalemite abil nimetatakse **vahetuks integreerimiseks**.

INTEGREERITAVA FUNKTSIOONI TEISENDAMINE TABELINTEGRAALIDEKS

Toome **mõne** näite integreerimise kohta, kus integreeritav funktsioon teisendatakse erinevate teisendustega tabeliintegraalideks.

Näide 6. Leida integraal $\int\frac{x^2dx}{x^2+1}$

Lahendus: Lisame lugejale ja lahutame lugejast ühe ja sama arvu 1:

$$\int\frac{x^2dx}{x^2+1}=\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx=\int\frac{x^2+1}{x^2+1}dx+\int\frac{-1}{x^2+1}dx=\int dx-\int\frac{dx}{x^2+1}=x-\arctan x+C.$$

Näide 7. Leida integraal $\int\frac{dx}{x^2(x^2+1)}$

Lahendus: Lisame lugejale ja lahutame lugejast ühe ja sama suuruse x^2:

$$\int\frac{dx}{x^2(x^2+1)}=\int\frac{(1+x^2-x^2)dx}{x^2(x^2+1)}=\int\frac{(1+x^2)dx}{x^2(x^2+1)}-\int\frac{x^2dx}{x^2(x^2+1)}=\int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{dx}{x^2+1}=-\frac{1}{x}-\arctan x+C.$$

Kui on tegemist trigonomeetria funktsioonidega, siis on mõnikord otstarbekas kasutada järgmisi valemeid:

$$\cos^2x+\sin^2x=1,$$

$$\cos^2x-\sin^2x=\cos 2x,\ 2\sin x\cos x=\sin 2x,$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Näide 8. Leida integraal

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}.$$

Lahendus: Et $1 = cos^2 x + sin^2 x$, siis

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} = \int \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)dx}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} = \int \frac{\cos^2 x dx}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} + \int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} =$$
$$= \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x - \cot x + C.$$

Näide 9. Leida integraal

$$\int (1 + \tan x)^2 dx.$$

Lahendus. Esiteks kasutame valemit $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, seega

$$\int (1+\tan x)^2 dx = \int (1 + 2\tan x + \tan^2 x)dx = \int (1 + \tan^2 x)dx + 2\int \tan x dx =$$
$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + 2\int \tan x dx = \tan x - 2\ln|\cos x| + C.$$

Kokkuvõtteks:

Diferentseerides leitakse antud funktsiooni kaudu tema tuletis (!on antud funktsioon!).

Integreerides leitakse funktsioon tema tuletise kaudu (!on antud tuletis!).

Seega on diferentseerimine ja integreerimine teineteise pöördoperatsioonid funktsioonide hulgas.

Diferentseerimine on ühene seos: kui funktsioonil on tuletis, siis ainult üks.

Integreerimine ei ole ühene: kui funktsioonil on algfunktsioon, siis on tal lõpmata palju algfunktsioone.