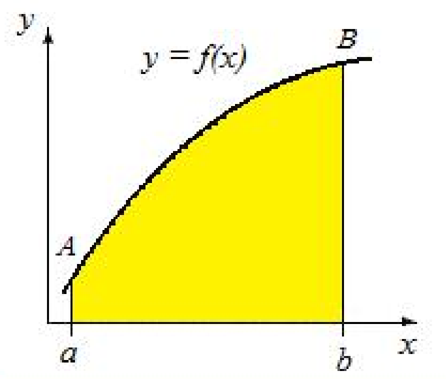
## MÄÄRATUD INTEGRAAL

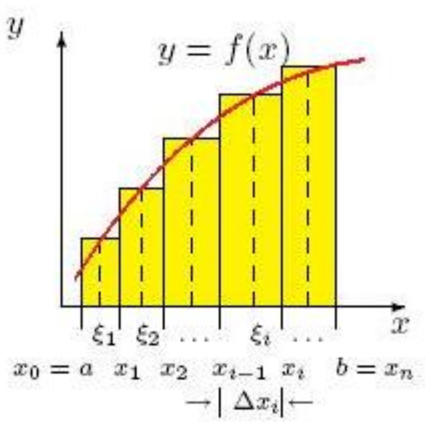
Matemaatikas, füüsikas, mehaanikas ja teistes valdkondades on võimsaks uurimisvahendiks määratud integraal. Määratud integraali arvutamisele taandub kõverjoontega piiratud kujundi pindala, kaare pikkuse, ruumala, töö, kiiruse, teepikkuse, inertsimomendi jms arvutamine.

### Kõverjooneline trapets (kõvertarapets)




Olgu on antud kujund, mida piiravad
$x$-telg,
funktsiooni $y = f(x)$ graafik,
sirge $x = a$,
sirge $x = b$
kusjuures $f(x) \geq 0$ lõigul [a;b].
Niisugust kujundit ABba nimetatakse **kõverjooneliseks trapetsiks.**

### Määratud integraali mõiste




Olgu funktsioon $y = f(x)$ määratud lõigul $[a; b]$. Jaotame lõigu $[a; b]$ suvalisel viisil punktidega $x_1,\ x_2,\ \dots x_{n-1}$ $n$ osalõiguks, kusjuures

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b.$$

Tekkinud osalõigud on $[x_{k-1}; x_k]$, kus $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Tähistagu $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ $k$-nda osalõigu pikkust.

Edasi valime igalt osalõigult täiesti suvalise punkti $\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, ja moodustame korrutised $f(\xi_k)\Delta x_k$. Liites need korrutised, saame summa

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

mida nimetatakse funktsiooni $f(x)$ integraalsummaks lõigul $[a; b]$.

Jaotuspunktid $x_1,\ x_2,\ \ldots$ on suvalised. Seeaga on osalõikude pikkused $\Delta x_k$, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ erinevad. Tähistagu $\lambda$ pikima osalõigu pikkust st

$$\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k.$$

**Definitsioon 1.** Kui piirväärtus

$$\lim_{\lambda \to 0} s_n$$

ei sõltu sellest, kuidas on lõik $[a; b]$ jaotatud osalõikudeks $[x_{k-1}; x_k]$, ega sellest, kuidas on valitud punktid $\xi_k$ osalõikudel, siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni $f(x)$ määratud integraaliks rajades $a$-st $b$-ni ja tähistatakse

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Seda loetakse: *integraal rajades a-st b-ni f kohal x de x.*

Seejuures integereerimislõigu alguspunkti $a$ nimetatakse alumiseks rajaks ja lõigu lõpp-punkti $b$ ülemiseks rajaks.

Seega definitsiooni kohaselt

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Kui lõigul $[a;b]$ on $f(x) \geq 0$, siis integraalsummas esinevad korrutised $f(\xi_k)\Delta x_k$ on selliste ristkülikute pindaladeks, mille alused on $\Delta x_k$ ja kõrgused $f(\xi_k)$. Selliste ristkülikute pindalade summa, st integraalsumma $s_n$ on ligikaudu võrdne niisuguse kõvertrapetsi pindalaga, mis alt on piiratud $x$-teljega, vasakult sirgega $x = a$, paremalt sirgega $x = b$ ja ülalt funktsiooni $y = f(x)$ graafikuga.

Kui vaadelda piirprotsessi $\lambda \to 0$, siis kõikide osalõikude pikkused hakkavad kahanema ja selleks et osalõigud kataksid kogu lõigu $[a;b]$, tuleb võtta neid osalõike järjest rohkem. Ristkülikute pindalade summa $s_n$ hakkab osalõikude arvu kasvades täpsemalt iseloomustama kõvertrapetsi pindala.

Seega, kui lõigul $[a;b]$ on $f(x) \geq 0$, *siis määratud integraal tähendab geomeetriliselt kõvertrapetsi pindala.*

**Definitsioon 2.** Funktsioone, mis rahuldavad definitsioonis 1 esitatud tingimusi, nimetatakse *lõigul* $[a;b]$ *integreeruvateks funktsioonideks.*

Kehtib teoreem.

**Teoreem 1.** Kui funktsioon $f(x)$ on pidev lõigul $[a;b]$, siis on see ka integreeruv lõigul $[a;b]$.

**Märkus.** Lõigul $[a;b]$ katkevate funktsioonide hulgas leidub nii integreeruvaid kui ka mitteintegreeruvaid.

**Märkus.**

Kujundi *AabB* pindala arvutatakse määratud integraali abil lõigul *[a; b]* ja kirjutatakse

$$S_{AabB} = \int_a^b f(x)dx.$$

Lõiku *[a; b]* nimetatakse integreerimislõiguks.