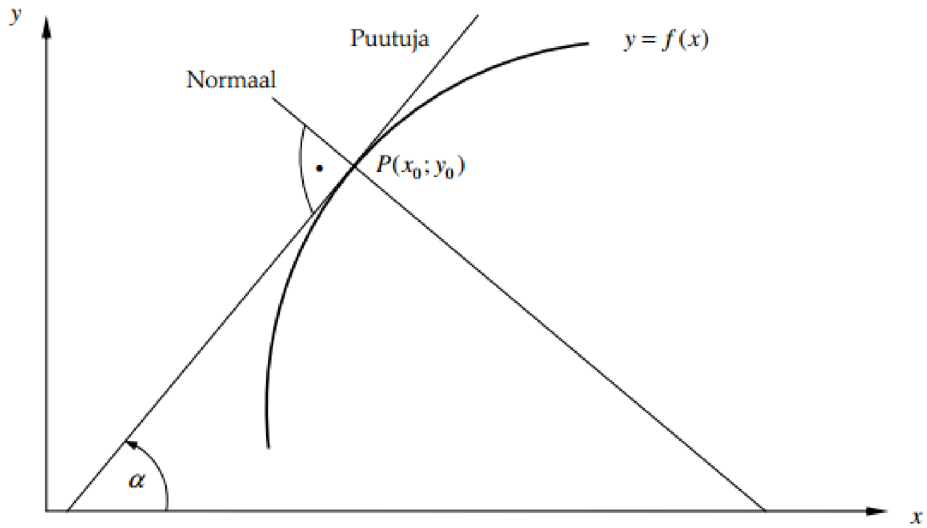
Tuletise rakendusi (I)
Joone puutuja võrrand (tuletise geomeetriline tähendus)



Joone $y = f(x)$ puutuja ja normaal punktis $P(x_0; y_0)$

Funktsiooni tuletisel on järgmine geomeetriline tähendus:

funktsiooni $y = f(x)$ **tuletis võrdub funktsiooni graafiku puutuja tõusuga** punktis, mille abstsiss on *x*. Seega

$$\boxed{k = f'(x) = \tan\alpha}$$

Geomeetriast on teada, et tõusuga *k* ja ühe punktiga $(x_0\,;\,y_0)$ määratud sirge võrrand on

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Saame, et joonele $y = f(x)$ punktis $(x_0\,;\,y_0)$ tõmmatud **puutuja võrrand** on

$$\boxed{y - y_0 = k_p(x - x_0)}$$

kus puutuja tõus $k_p = f'(x_0) = \tan\alpha$ **(nurk** α **on puutuja tõusunurk).**

Näide 1. Leida joone $f(x) = e^x$ puutuja punktis, kus $x_0 = 0$.

Lahendus. Leiame kõigepealt puutupunkti teise koordinaadi y_0.

$$y_0 = f(x_0) = e^0 = 1.$$

Puutuja tõusu k_p leidmiseks leiame tuletise $f'(x) = e^x$ ja arvutame tuletise väärtuse punktis $x_0 = 0$.

$$k_p = f'(0) = e^0 = 1.$$

Saame puutuja võrrandi.

$$y - 1 = 1 \cdot (x - 0),$$
$$y - 1 = x,$$
$$y = x + 1.$$

Vastus. Puutuja võrrand on $y = x + 1$.

Näide 2. Leida joone $f(x) = x^2 + 1$ puutuja võrrand kohal $x_0 = 2$.

Lahendus. Et puutepunkt on joone ja puutuja ühine punkt, siis

$$y_0 = f(x_0) = 2^2 + 1 = 5$$

ning puutepunkt on koordinaatidega $(2\,;5)$.

Leiame funktsiooni tuletise $f'(x) = 2x$ ja selle väärtuse puutepunktis $f'(2) = 4$. Seega puutuja tõus $k = 4$. Asendades leitud suurused puutuja võrrandisse, saame

$$y - 5 = 4(x-2) \text{ ehk } y = 4x - 3.$$

Vastus. Puutuja võrrand on $y = 4x - 3$.

Näide 3. Leida punktid, milles hüperbooli $f(x) = \frac{1}{x}$ puutuja on paralleelne sirgega $y = -\frac{1}{4}x + 3$.

Lahendus. Olgu $(x_0\,;\,y_0)$ punktid, milles hüperboolile tõmmatud puutujad on paralleelsed antud sirgega. Leiame sirge võrrandist selle sirge tõusu $k = -\frac{1}{4}$ (sirge võrrandis $y = kx + b$ on kordaja k sirge tõus). Et antud sirge ja otsitav puutuja on paralleelsed, siis on puutuja tõus k_p otsitavas punktis $(x_0\,;\,y_0)$ samuti võrdne $-\frac{1}{4}$. Saame, et

$$k_p = f'(x_0) = -\frac{1}{4}.$$

Leiame nüüd

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -1 \cdot x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2}.$$

Seostest $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ ja $f'(x_0) = -\frac{1}{4}$ saame, et

$$-\frac{1}{x_0^{\,2}} = -\frac{1}{4},$$

millest

$$x_0^{\,2} = 4, \quad x_0 = \pm 2.$$

Arvutame ka puutepunktide teised koordinaadid $y_0 = f(x_0)$.

Kui $x_0 = +2$, siis $y_0 = f(2) = \frac{1}{2}$ ja puutepunkt on $\left(2\,;\frac{1}{2}\right)$.

Kui $x_0 = -2$, siis $y_0 = f(-2) = -\frac{1}{2}$ ja puutepunkt on $\left(-2\,;-\frac{1}{2}\right)$.

Vastus. Punktid on $\left(2\,;\frac{1}{2}\right)$ ja $\left(-2\,;-\frac{1}{2}\right)$.

Näide 4. Leida parabooli $f(x) = 3x - x^2$ puutuja, mis on paralleelne sirgega $y = 5x - 1$.

Lahendus. Paralleelsete sirgete tõusud on võrdsed, seega on otsitava puutuja tõus 5 (sirge võrrandis $y = kx + b$ on kordaja *k* sirge tõus).

Teisalt $k = f'(x_0)$. Leiame $f'(x) = 3 - 2x$ ja saame võrrandi

$$3 - 2x_0 = 5 \quad \Rightarrow \quad x_0 = -1.$$

Puutepunkti ordinaadi leiame antud joone võrrandist.

$$y_0 = f(x_0) = 3\cdot(-1) - (-1)^2 = -3 - 1 = -4.$$

Seega on puutepunkt $(-1\,;-4)$ ja puutuja võrrand

$$y + 4 = 5(x+1) \text{ ehk } \quad y = 5x + 1.$$

Vastus. Puutuja võrrand on $y = 5x + 1$.

Näide 5. Leida punkt, milles joonele $f(x) = 2 - x^2$ tõmmatud puutuja moodustab *y*-teljega nurga $135°$. Koostada selle puutuja võrrand.

Lahendus. Sirge tõusunurk on *x*-telje positiivse suuna ja sirge vaheline nurk. Et otsitav puutuja moodustaks *y*-teljega nurga $135°$, peab ta *x*-teljega moodustama nurga $45°$.

Puutuja tõus $k_p = f'(x_0) = \tan\alpha$.

Praegu $k_p = f'(x_0) = \tan 45^\circ = 1$.

Leiame $f'(x) = -2x$ ja koostame võrrandi puutepunkti $(x_0\ ;\ y_0)$ abstsissi x_0 arvutamiseks ning lahendame selle.

$$-2x_0 = \tan 45°\,,$$
$$-2x_0 = 1\,,$$
$$x_0 = -\frac{1}{2} = -0{,}5\,.$$

Joone võrrandist puutepunkti ordinaat $y_0 = f(x_0) = 2 - x_0^{\ 2}$ ehk $y_0 = 2 - (-0{,}5)^2 = 1{,}75$.

Saame puutuja võrrandi.

$$y - 1{,}75 = 1 \cdot (x - (-0{,}5))\,,$$

$$y - 1{,}75 = x + 0{,}5\,,$$

$$y = x + 2{,}25\,.$$

Vastus. Punkt on (-0,5 ; 1,75) , puutuja võrrand on $y = x + 2{,}25$.