

Tuletise rakendused III

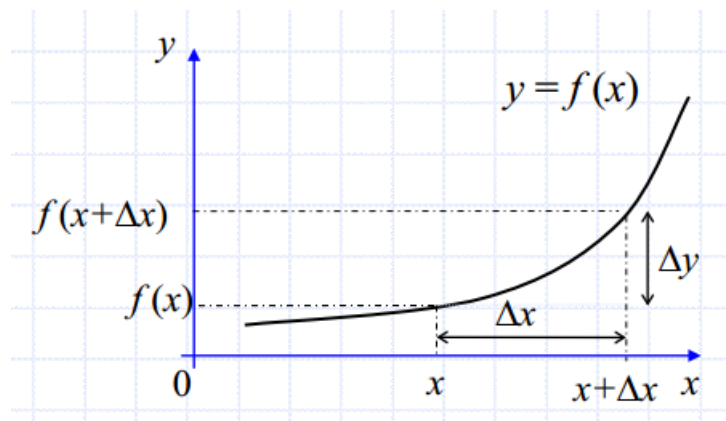
Tuletise mehaaniline (füüsiline) tõlgendus

Olgu antud funktsioon $y = f(x)$. Fikseerime selle funktsiooni määramispiirkonnas uhe vabalt valitud punkti x . Lähtudes sellest fikseeritud väärtusest, suurendame **argumenti x muudu Δx** võrra. Argumendi muudu võrra erinevas punktis on argumendi väärtuseks $x + \Delta x$. Funktsiooni väärtus selles punktis on $f(x + \Delta x)$. Funktsiooni väärtus muutub $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ võrra. Suurust Δy nimetatakse argumendi muudule Δx vastavaks **funktsiooni muuduks**.

Definitsioon. Funktsiooni muudu ja argumendi muudu suhte piirväärtust argumendi muudu lähenemisel nullile nimetatakse **funktsiooni tuletiseks** kohal x ja tähistatakse $f'(x)$.

Seega definitsiooni kohaselt

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$



Kuna funktsiooni muut $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, siis

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Kui vaatleme muutujat x **ajana**, siis kirjeldab funktsioon $y = f(x)$ mingisugust ajas kulgevat protsessi, näiteks sirgjoonelist **liikumist**. Ajahetkel x on liikuv objekt punktis $f(x)$ ja ajahetkel $x + \Delta x$ punktis $f(x + \Delta x)$.

Seega ajavahemiku Δx jooksul on objekt liikunud Δy võrra. Suhe $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tähendab objekti **keskmist**

liikumiskiirust ajavahemiku Δx jooksul. Mida väiksem on ajavahemik Δx , seda täpsemalt iseloomustab see keskmine kiirus objekti liikumiskiirust ajahetkel x . Seega piirväärtus

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

st funktsiooni tuletis kohal x kujutab endast objekti liikumiskiirust ajahetkel x ehk **hetkekiirust** (kiirust konkreetses punktis).

See arutlus on üle kantav *mistahes protsessile*. Kui see protsess on kirjeldatav funktsiooniga $y = f(x)$, siis $f'(x)$ tähendab selle protsessi muutumiskiirust hetkel x .

Tuletis on füüsikas asendamatu abivahend loodusnähtuste kirjeldamisel. Üks olulisi tuletise rakendusi on näiteks füüsikaliste suuruste (ajalise) muutmise kiiruse kirjeldamine

Kui keha liikumist kirjeldab seos $s = f(t)$, kus t on liikumise aeg, siis ketib

$$v(t) = s'(t)$$

kus $v(t)$ on keha liikumise hetkekiirus ajamomendil t .

Ning

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

kus $a(t)$ on keha liikumise kiirendus ajamomendil t .

Näide 1. Esitagu keha liikumist valem $s = 3t^2 + 5$. Leiame keha kiiruse hetkel t :

$$\text{Kuna } v(t) = s'(t), \text{ siis } v(t) = (3t^2 + 5)' = 6t$$

$$\text{Seega } v = 6t.$$

Kui aega mõõdetakse sekundites ja tee pikkust sentimeetrites, siis näiteks 4 sekundi möödudes liikumise algusest ($t = 0$) on keha kiirus $6 \cdot 4 = 24$ cm/sek.

Näide 2. Keha liigub sirgjooneliselt seaduse järgi $s = 2t - t^2$. Leia keha kiirus

- 1) liikumise alguses,
- 2) momendil $t = 3$.

Lahendus:

Teame, et kiirus on teepikkuse tuletis. Leiame tuletise üldavaldise, mis kujutab endast liikumise kiiruse valemit:

$$v(t) = s'(t) = 2 - 2t$$

Kiiruse valem on $v = 2 - 2t$. Leiame selle valemi järgi keha kiiruse momendil $t = 0$ (liikumise alguses) ja momendil $t = 3$. Saame

$$v(0) = 2 - 2 \cdot 0 = 2;$$

$$v(3) = 2 - 2 \cdot 3 = -4.$$

Negatiivne kiirus tähendab liikumist positiivse suuna vastandsuunas.

Vastus: Keha kiirus momendil $t = 0$ on 2 ühikut ja momendil $t = 3$ on -4 ühikut.

Näide 3.

Sirgjooneliselt liikuva punkti liikumisseaduseks on

$$x(t) = t^2 - 13t + 23$$

kus x on kaugus liikumise alguspunktist, ning t on aeg sekundites liikumise algusest. Leida milisel ajamomendil liikumise kiirus oli võrdne 3 m/s?

Lahendus. Kui meil on teada kiirust mingil ajamomendi, see tähendab, et meil on teada funktsiooni tuletise väärtust vastaval kohal.

Leiame funktsiooni tuletise:

$$x(t) = t^2 - 13t + 23, \quad x'(t) = 2t - 13$$

Ülesandest on teada, et punkti kiiruseks oli 3 m/s, seega tuletise väärtus otsitava momemndil t_0 võrdub 3. Seega saame võrrandi t suhtes:

$$x'(t_0) = 2t_0 - 13 = 3$$

Millest $t_0 = 8$

Vastus: $t_0 = 8$

Näide 4

Liikugu punkt mingis koordinaadisüsteemis sirgjooneliselt võrrandi $x = t^2 + 3$ järgi. Kiiruse leidmiseks ajahetkel t võetakse liikumisvõrrandist aja järgi tuletis: $x' = 2t$. Kiiruse võrrandist omakorda tuletise võtmine annab kiiruse ajalise muutumise kiiruse ehk kiirenduse: $v' = 2$. Näeme, et antud punkt liigub ühtlase kiirendusega..

Näide 5

Keemilisel reaktsioonil saadud aine hulk y grammides sõltub ajast t minutites järgmise valemi järgi $y = 0,6t^2$. Millise kiirusega kasvab ainehulk ajamomendil $t_0 = 10$ minutit?

Lahendus:

$$y'(t) = 1,2t$$

$y'(10) = 1,2 \cdot 10 = 12$ grammi minutis.

Seega kasvab ajamomendil $t_0 = 10$ minutit ainehulk kiirusega 12 grammi minutis. See tähendab, et kui ajamomendist $t_0 = 10$ minutit alates kulgeks reaktsioon edasi ühtlaselt, siis tekiks igas minutis ainet juurde 12 grammi