Tuletise rakendusi

Ekstreemumid (lokaalne ekstreemum)

Funktsiooni graafiku punkte, milles funktsiooni kasvamine läheb üle kahanemiseks või vastupidi, nimetatakse **ekstreemumpunktideks** ja vastava punkti abstsissi väärtust x_e **ekstreemumkohaks** ning ordinaadi väärtust $y_e = f(x_e)$ **funktsiooni ekstreemumiks**.

Funktsiooni **ekstreemumi olemasolu tarvilikuks tingimuseks** on, et oletatav ekstreemumkoht on võrrandi $f'(x)=0$ lahendiks. Funktsioonil võib olla ekstreemum ka nendel argumendi väärtustel, mille korral *tuletis ei ole määratud*.

I meeod funktsiooni ekstreemumite määramiseks

Kui $f'(x_0)=0$ või $f'(x_0)$ ei ole määratud, siis kontrolliks, kas x_0 on ekstreemumkoht, kasutatakse **ekstreemumi olemasolu piisavaid tingimusi**, mis on järgmised. Kui funktsiooni $y=f(x)$ **tuletis** üleminekul väärtusest $x=x_0$ (liikudes vasakult paremale) **muudab märki** plussilt miinusele (või vastupidi), siis x_0 on maksimumkoht (miinimumkoht), $f(x_0)$ on funktsiooni maksimum (miinimum) ja punkt $(x_0\ ;\ f(x_0))$ funktsiooni graafiku maksimumpunkt (miinimumpunkt).

Kui **tuletis märki ei muuda**, siis funktsioonil ei ole sellel kohal ekstreemumit.

II meeod funktsiooni ekstreemumite määramiseks

Funktsiooni ekstreemumkoha olemasolu ja liigi kindlakstegemisel võib kasutada ka teist tuletist $f''(x)$.

Kui x_0 on *maksimumkoht*, siis peavad olema täidetud tingimused

$$f'(x_0)=0 \text{ ja } f''(x_0)<0.$$

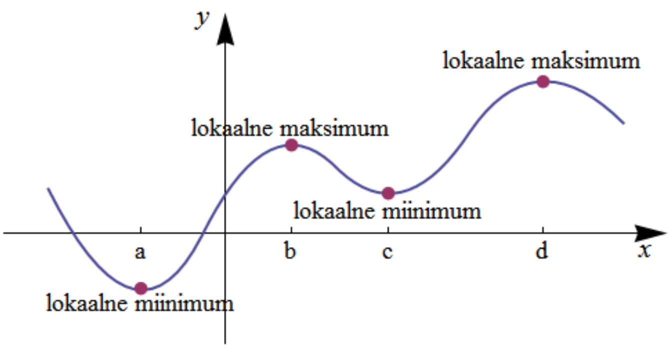
Kui x_0 on *miinimumkoht*, siis peavad olema täidetud tingimused

$$f'(x_0)=0 \text{ ja } f''(x_0)>0.$$

NB! Kui osutub, et $f''(x_0)=0$, siis peab ekstreemumkoha kindlakstegemiseks kasutama esimest tuletist y'.

Difeneeritud ekstreemumeid nimetatakse ka **lokaalseteks** (ladina keeles *localis*- kohalik, paikne).

Funktsioonil võib olla palju lokaalseid ekstreemumeid.



Näide 1

Leida funktsiooni $y=x^3-12x+5$ ekstreemumid.

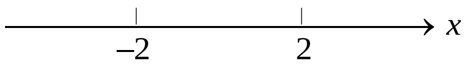
Lahendus. Leiame tuletise:

$$y' = 3x^2 - 12 = 3\left(x^2 - 4\right) = 3(x-2)(x+2).$$

Tuletise märgi määramiseks leiame kõigepealt tuletise nullkohad, s.t. võrrandi $y' = 0$ lahendid:

$$3(x-2)(x+2) = 0, \text{ kui } \ x = 2 \ \text{ või } \ x = -2.$$

Joonistame *x*-telje ja kanname sinna tuletise nullkohad.



Moodustame vahemikud, mida piiravad need tuletise nullkohad:

$(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$, $(2, \infty)$.

Igas sellises vahemikus säilitab tuletis märki, s.t. on kas positiivne või negatiivne.

Anname esimesest vahemikust $(-\infty, -2)$ näiteks *x*-le väärtuse -3 ehk $x = -3$ ja arvutame tuletise väärtuse sellel kohal, milleks on

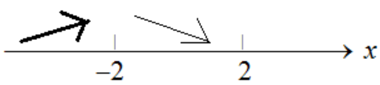
$$y'(-3) = 3(-3)^2 - 12 = 3 \cdot 9 - 12 = 18 - 12 = 6 > 0.$$

Selgub, et tuletis on sellel kohal positiivne (seega selles vahemikus funktsioon kasvab). Kanname vastava noole joonisele.

Teisest vahemikust $(-2, 2)$ võtame $x = 0$ ja arvutame tuletise väärtuse sellel kohal.

$$y'(0) = 3 \cdot 0 - 12 = -12 < 0.$$

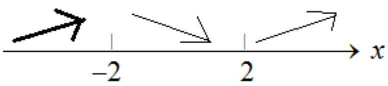
Tuletis on negatiivne (selles vahemikus funktsioon kahaneb). Kanname ka kahanemise vastava noolega joonisele.



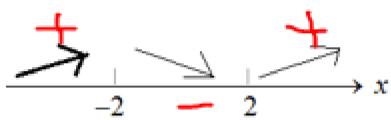
Kolmandast vahemikust $(2, \infty)$ võtame $x = 3$ ja arvutame

$$y'(3) = 3 \cdot 3^2 - 12 = 27 - 12 = 15 > 0.$$

Tuletis on positiivne (selles vahemikus funktsioon kasvab), joonistame ka selle noole joonisele.



Kanname joonisele ka tuletise märgid igas piirkonnas:



Sellest jooniselt saab määrata ka argumendi *x* väärtused, mille korral on funktsioonil ekstreemumid!

Argumendi *x* väärtusest -2 vasakul funktsioon kasvab ja paremal kahaneb, järelikul kohal $x=-2$ on funktsioonil ekstreemum ja nimelt maksimum ning vastav funktsiooni väärtus on

$$y_{\max}(-2)=(-2)^3-12\cdot(-2)+5=-8+24+5=21.$$

Argumendi *x* väärtusest 2 vasakul funktsioon kahaneb ja paremal kasvab, järelikult kohal $x=2$ on funktsioonil ekstreemum ja nimelt miinimum ning vastav funktsiooni väärtus on

$$y_{\min}(2)=2^3-12\cdot 2+5=8-24+5=-11.$$

Vastus. $y_{\max}(-2)=21$, $y_{\min}(2)=-11$.

Näide 2 Leida funktsiooni $y=(x-3)\sqrt{x}$ ekstreemumid.

Lahendus. Selle funktsiooni avaldises on tegur $\sqrt{x}$, ruutjuurt saab võttat mittenegatiivsetest arvudest, seega peab olema $x\geq 0$. See tingimus annab määramispiirkonnaks hulga $X=[0,\infty)$.

Leiame tuletise (korrutise tuletise valemiga).

$$y'=1\cdot\sqrt{x}^{\left(2\sqrt{x}\right.}+(x-3)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}\sqrt{x}+x-3}{2\sqrt{x}}=$$
$$=\frac{2x+x-3}{2\sqrt{x}}=\frac{3x-3}{2\sqrt{x}}=\frac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}.$$

Nüüd leiame tuletise nullkoha, milleks on lugeja nullkoht $x-1=0$ ehk $x=1$.

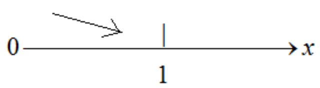
Leiame ka *x* väärtuse, mille puhul tuletist ei ole. See on praegu $x=0$, sest tuletise avaldises on nimetajas $\sqrt{x}$. Kui $x=0$, siis $\sqrt{x}=\sqrt{0}=0$ ja tuletist ei saa arvutada.

Funktsiooni määramispiirkond, tuletise nullkoht $x=1$ ja koht $x=0$, kus tuletist ei ole, annavad kaks piirkonda, milles määrame tuletise märgi. Nendeks piirkondadeks on vahemikud $(0,1)$ ja $(1,\infty)$.

Anname vahemikust $(0,1)$ näiteks *x*-le väärtuse 0,5 ehk võtame $x=0{,}5$ ja arvutame tuletise väärtuse sellel kohal.

$$y'(0{,}5)=\frac{3(0{,}5-1)}{2\sqrt{0{,}5}}<0.$$

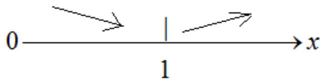
Selgub, et tuletis on sellel kohal negatiivne, seega vahemikus $(0,1)$ funktsioon kahaneb. Kanname vastava noole joonisele.



Võtame teisest vahemikust $(1, \infty)$ $x = 2$ ja arvutame:

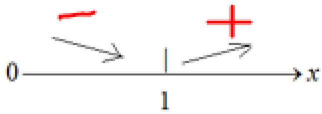
$$y'(2) = \frac{3(2-1)}{2\sqrt{0,5}} > 0.$$

Tuletis on positiivne, seega vahemikus $(1, \infty)$ funktsioon kasvab. Kanname noole joonisele.



Saime $X \downarrow = (0,1)$, $X \uparrow = (1, \infty)$, $y_{\min}(1) = -2$.

Kanname joonisele ka tuletise märgid:



Näeme, et argumendi *x* väärtusest 1 vasakul funktsioon kahaneb ja paremal kasvab, järelikult kohal $x = 1$ on funktsioonil ekstreemum ja nimelt miinimum. Vastav funktsiooni väärtus on

$$y_{\min}(1) = (1-3)\sqrt{1} = -2.$$

Vastus. $y_{\min}(1) = -2$.

Näide 3 Leida funktsiooni $f(x) = x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x + 1$ ekstreemumid.

Lahendus. Kasutame siin funktsiooni ekstreemumkoha olemasolu ja liigi kindlakstegemisel **teist tuletist** $f''(x)$.

Kui x_0 on *maksimumkoht*, siis peavad olema täidetud tingimused

$$f'(x_0) = 0 \text{ ja } f''(x_0) < 0.$$

Kui x_0 on *miinimumkoht*, siis peavad olema täidetud tingimused

$$f'(x_0) = 0 \text{ ja } f''(x_0) > 0.$$

Leiame $f'(x)$ ja $f''(x)$.

$$f'(x) = 3x^2 + 5x - 2,$$
$$f''(x) = 6x + 5.$$

Lahendame võrrandi $f'(x) = 0$.

$$3x^2 + 5x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 3 \cdot 2}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6}.$$

Oletatavad ekstreemumkohad on $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = -2$.

Arvutame $f''\left(\frac{1}{3}\right)$ ja $f''(-2)$.

$f''\left(\frac{1}{3}\right) = 6 \cdot \frac{1}{3} + 5 = 7 > 0$, järelikult $x = \frac{1}{3}$ on miinimumkoht;

$f''(-2) = -12 + 5 = -7 < 0$, järelikult $x = -2$ on maksimumkoht.

Vastus. Ekstreemumid on $f_{\min}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{35}{54}$, $f_{\max}(-2) = 7$.

Näide 4 Leida funktsiooni $y = 2x^3 + x^2 - 20x + 10$ kasvamis- ja kahanemispiirkonnad ning ekstreemumid.

Lahendus. Kuna ülesandes nõutakse kasvamis-, kahanemispiirkondade ja ekstreemumite leidmist, siis kasutame lahenduskäigus ainult esimest tuletist y'.

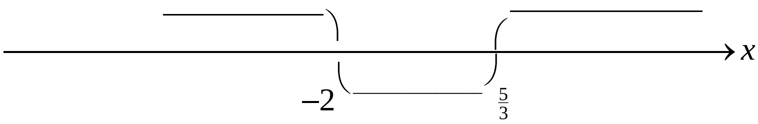
Avaldame y'.

$$y' = 6x^2 + 2x - 20.$$

Leiame võrrandi $y' = 0$ lahendid.

$$6x^2 + 2x - 20 = 0 \quad |:2$$
$$3x^2 + x - 10 = 0$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 3 \cdot 10}}{6} = \frac{-1 \pm 11}{6}.$$

Seega on esimese tuletise nullkohad $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{5}{3}$. Joonistame tuletisfunktsiooni y' märki määrava kõvera:



Jooniselt näeme, et üleminekul nullkohast $x = -2$ muudab tuletis märki plussilt miinusele, seega $x = -2$ on maksimumkoht ja funktsiooni maksimum on

$$y_{\max}(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + (-2)^2 - 20 \cdot (-2) + 10 = 38.$$

Nullkoha $x = \frac{5}{3}$ ümbruses muutub tuletise märk miinuselt plussile, järelikult on $x = \frac{5}{3}$ miinimumkoht ja funktsiooni miinimum on

$$y_{\min}\left(\frac{5}{3}\right) = -11\frac{8}{27}.$$

Tuletisfunktsiooni positiivsuspiirkond (s.o. võrratuse $y' > 0$ lahendid) on funktsiooni kasvamispiirkonnaks, negatiivsuspiirkond (võrratuse $y' < 0$ lahendid) aga kahanemispiirkonnaks.

Seega jooniselt näeme, et $X\uparrow=(-\infty\,;-2)$, $X\uparrow=\left(\frac{5}{3}\,;\infty\right)$ ja $X\downarrow=\left(-2\,;\frac{5}{3}\right)$.

Vastus. $y_{\max}(-2)=38$, $y_{\min}\left(\frac{5}{3}\right)=-11\frac{8}{27}$, $X\uparrow=(-\infty\,;-2)$, $X\uparrow=\left(\frac{5}{3}\,;\infty\right)$, $X\downarrow=\left(-2\,;\frac{5}{3}\right)$.