Tuletise rakendusi

Ekstreemumülesanded

Igapäevane elu seab meie ette sageli probleeme, mille lahendamiseks tuleb leida mingi funktsiooni suurim või vähim väärtus.

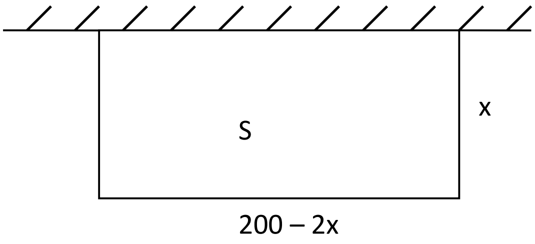
Näiteks on vaja saavutada maksimaalne toodang minimaalsete materiaalsete ressursside ja inimtööjõuga, leida minimaalne variant energia tarbimises jne.

Kandes nimetetud probleemid üle nende matemaatilistesse mudelitesse, võib neid uurida ja lahendada ekstreemumarvutuse võtetega.

Mingi suuruse suurima või vähima väärtuse leidmise ülesannet nimetatakse ekstreemumülesandeks.

Näide 1

Traadiga, mille pikkus on 200 m, tuleb ümbritseda kolmest küljest ristkülikukujuline koppel. Leia ristküliku mõõtmed nii, et tema pindala oleks suurim.



Lahendus:
Tähistame kopli laiuse x-ga, siis pikkus on 200 – 2x (vt joonis 1.). Kopli pindala on
$S = (200 - 2x)\, x$
$S = 200x - 2x^2$.
Ülesande tingimustest järeldub, et argumendi x väärtus peab kuuluma lõiku

$200 - 2x \geq 0;$

$-2x \geq -200;$

$x \leq 100$

ehk

$0 \leq x \leq 100.$

Tuleb leida funktsiooni S suurim väärtus antud lõigus.
Leiame argumendi kriitilised väärtused:
$S' = 200 - 4x;$
$200 - 4x = 0;$
$x = 50.$
Nüüd arvutame funktsiooni väärtused kohtadel 0, 50 ja 100:
$S(0) = 200 \cdot 0 - 2 \cdot 0^2 = 0;$
$S(50) = 200 \cdot 50 - 2 \cdot 50^2 = 10000 - 5000 = 5000;$
$S(100) = 200 \cdot 100 - 2 \cdot 100^2 = 20000 - 20000 = 0.$
Näeme, et pindala omandab suurima väärtuse (5000 m^2), kui x = 50. See on ka antud funktsiooni maksimumkoht.
Vastus: Ristküliku kolm külge, mis piiratakse traadiga, on 50 m, 100 m ja 50 m.

Näide 2

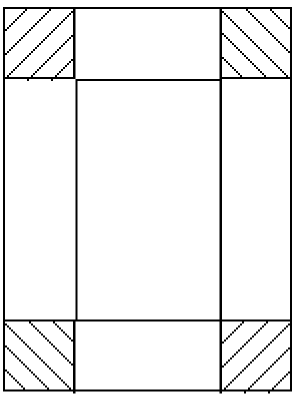
Laohoone planeeritakse risttahukakujuline. Materjalist piisab etteantud kõrgusega välisseina 140 jooksva meetri ehitamiseks. Kuidas valida vundamendi mõõtmed, et hoone põranda pindala oleks suurim?
Lahendus:
Olgu hoone laius x meetrit, siis pikkus on 70 – x meetrit ja põranda pindala

$S = x(70 – x)$;
$S = 70x – x^2$.
Põranda pindala S on nüüd avaldatud hoone laiuse x funktsioonina ning meil otuleb leida selle funktsiooni maksimumkoht. Selleks leiame funktsiooni tuletise, võrdsustame selle nulliga ning kontrollime teise tuletise abil, kas saadud nullkoht on maksimum- või miinimumkoht:
$S' = 70 – 2x$;
$70 – 2x = 0$;
$2x = 70$;
$x = 35$ (m);
$S'' = – 2 < 0$, seega $x = 35$ on maksimumkoht.
Leiame põranda pindala:
$S = 70 \cdot 35 – 352 = 1225$ (m^2)
Vastus: Laohoone põranda pindala on suurim siis, kui põhiplaan teha ruudukujuline, küljepikkusega 35 meetrit. Sel juhul on põranda pindala 1225 m^2.

Näide 3

Risttahukakujulise plekitahvli mõõtmed on 50 cm ja 80 cm. Plekitahvli nurkadest tuleb ära lõigata neli ruutu nii, et järelejäänud osast saaks moodustada võimalikult suure ruumalaga karbi (vt joonis 2.). Arvuta äralõigatavate ruutude külje pikkus.

Lahendus:
Olgu väljalõigatavate ruutude külje pikkus x cm, siis on plekitahvlist valmistatava karbi põhjaks ristkülik külje pikkustega 80 – 2x cm ja 50 – 2x cm. Et karbi kõrgus on x, siis ruumala avaldub kujul
$V = x(80 – 2x)(50 – 2x)$;
$V = 4x^3 – 260x^2 + 4000x$.



Joonis 2.

Leiame selle funktsiooni tuletise:
$V' = 12x^2 – 520x + 4000$
ja lahendame võrrandi
$12x^2 – 520x + 4000 = 0$;

$$12x^2 - 520x + 4000 = 0 \quad \Big| :4$$

$$3x^2 - 130x + 1000 = 0;$$

$$x = \frac{130 \pm \sqrt{130^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1000}}{2 \cdot 3} = \frac{130 \pm \sqrt{4900}}{6};$$

$$x = \frac{130 \pm 70}{6};$$

$$x_1 = \frac{130 + 70}{6} = \frac{200}{6} = 33\frac{1}{3};$$

$$x_2 = \frac{130 - 70}{6} = 10.$$

Seda, kas leitud lahendid on maksimum- või miinimumkohtadeks, selgitame teise tuletise kaasabil:
$V'' = 24x - 250$.

$V''\left(33\frac{1}{3}\right) = 24 \cdot 33\frac{1}{3} - 250 = 550 > 0$, seega $x = 33\frac{1}{3}$ on miinimum

$V''(10) = 24 \cdot 10 - 250 = -10 < 0$, seega $x = 10$ on maksimum

Lõigates ruudud välja küljepikkusega 10 cm, saame maksimaalse ruumala
$V = 4 \cdot 10^3 - 260 \cdot 10^2 + 4000 \cdot 10 = 18000$ (cm^3).
Vastus: Äralõigatava ruudu külg peab olema 10 cm.

Näide 4

Olgu kasumifunktsioon antud valemiga $\pi(q) = -2q^3 + 49q^2 + 120q - 100$, kus q on tootmismaht**.** Leida maksimaalset kasumit kindlustav tootmismaht ja maksimaalne kasum

Arvutame esiteks kasumi

$$\pi(q) = -2q^3 + 49q^2 + 120q - 100$$

ning leiame tuletised

$$\pi'(q) = -6q^2 + 98q + 120 \quad \text{ja} \quad \pi''(q) = -12q^2 + 98.$$

Võrrandil

$$-6q^2 + 98q + 120 = 0$$

on vaid üks positiivne lahend $q \approx 17{,}5$. Kuna $\pi''(17{,}5) < 0$, siis $q \approx 17{,}5$ on funktsiooni $\pi(q)$ lokaalne maksimumkoht. Tegelikult on see ka kasumifunktsiooni globaalne maksimumkoht, sest mittenegatiivsete q väärtuste korral $q < 17{,}5$ puhul kasumifunktsioon kasvab, $q > 17{,}5$ puhul aga kahaneb (sest teisi lokaalseid ekstreemume $q > 0$ korral peale $q \approx 17{,}5$ ei ole). Maksimaalseks kasumiks on $\pi_{max}(17{,}5) = 6287{,}5$.

Näide 5

Kasumifunktsioon on antud valemiga $\pi = 14q - 0{,}1q^2$, Leida kasumit maksimeeriv q väärtus ja maksimaalne kasum

a) juhul, kui firma suudab antud toodet toota maksimaalselt 100 ühikut;

b) juhul, kui firma suudab antud toodet toota maksimaalselt 50 ühikut.

Lahendus.

$$\pi = 14q - 0{,}1q^2,$$

kus juhul a) $q \in [0, 100]$ ja juhul b) $q \in [0, 50]$. Leiame funktsiooni $\pi(q)$ statsionaarsed punktid:

$$\pi' = 14 - 0{,}2q;\ 14 - 0{,}2q = 0 \Rightarrow q = 70.$$

Näeme, et juhul a) 70 tooteühiku tootmine on võimalik, juhul b) aga mitte. Tõestame, et $q = 70$ tagab funktsiooni $\pi(q)$ globaalse maksimumi piirkonnas $q \in [0, \infty)$. Selleks saab kasutada kahte moodust:

1. Kuna $\pi''(q) = -0{,}2 < 0$ iga q väärtuse korral, siis $q = 70$ on funktsiooni $\pi(q)$ globaalne maksimum.
2. Kuna $q = 70$ on kasumifunktsiooni ainus lokaalne ekstreemum, siis $q < 70$ korral on $\pi(q)$ kasvav ja $q > 70$ korral kahanev. Järelikult on $q = 70$ ka globaalseks maksimumiks.

a) Kuna firma tootmisvõimsus lubab toota maksimaalselt 100 ühikut, siis on kasumit maksimeerivaks q väärtuseks 70, maksimaalseks kasumiks on

$$\pi(70) = 14 \cdot 70 - 0{,}1 \cdot 70^2 = 490 \text{ rahaühikut}$$

b) Kuna firma tootmisvõimsus lubab antud juhul toota maksimaalselt 50 ühikut, siis 70 ühiku tootmine pole firmale jõukohane. Arvestades, et $\pi(0) = 0$ ja $\pi(50) = 450$, näeme, et maksimaalse kasumi tagab tootmismaht 50 ühikut. Maksimaalne kasum on siis 450 rahaühikut

Näide 6

Autobensiini kulu y sõltub kiirusest v ning $y = 58 - 1{,}12v + 0{,}008v^2$,

$30 \le v \le 120$. Bensiini hind on €1,02.

Kui suur on ökonoomseim auto kiirus, mille bensiinikulu on minimaalne?

Lahendus

Ülesanne eesmärgiks on bensiini kulu minimiseerimine:

$$y = 58 - 1{,}12v + 0{,}008v^2 \rightarrow \min,$$

ehk on ekstreemumülesanne, mida lahendatakse tuletiste abil.

Leiame tuletise

$$y' = -1{,}12 + 0{,}016v.$$

Ekstreemumi olemasoleku tarvilikuks tingimuseks on $y' = 0$,

ehk

$$-1{,}12 + 0{,}016v = 0.$$

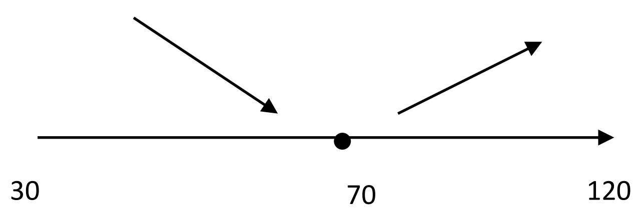
Lahendame võrrandi ja leiame v :

$$0{,}016v = 1{,}12 \Rightarrow v = \frac{1{,}12}{0{,}016} = 70\,.$$

Kuna kiirus oli piiratud ($30 \le v \le 100$), siis tuleb uurida kiiruse märki vahemikus (30, 70) ja (70; 120). Selleks tuleb valida väärtust esimest lõigust ja teisest lõigust, asendada väärtusi y' -sse ja uurida mis märki omab tuletis igas vahemikus. Kui $y' > 0$, siis funktsioon on kasvav ja kui $y' < 0$, siis kahanev. Ekstreemumi olemasoleku piisavaks tingimuseks on ekstreemumkohas üleminek kasvamiselt kahanemisele (või vastupidi).

$y'(40) = -0{,}48 < 0 \Rightarrow y$ on kahanev

$y'(90) = 0{,}32 > 0 \Rightarrow y$ on kasvav



Ekstreemumkohas on üleminek kahanemiselt kasvamisele, ehk selles punktis ($v = 70$)on lokaalne miinimum.

Vastus: kiirusega $v = 70$ km/h on bensiini kulud minimaalsed.

Näide 7

Kuidas muutub bensiinikulu 500 km pikkuse teelõigu läbimisel , kui sama auto (vt eelmist näidet) kiirus on 100 km/h? Kui suur on bensiinikokkuhoid õige sõidukiiruse korral?
Lahendus:

Leiame mitu liitrit bensiini kulub $v_1 = 70$ km/h ja $v_2 = 100$ km/h iga 100 km kohta:

$y(70) = 58 – 1{,}12 \cdot 70 + 0{,}008 \cdot 70^2 = 18{,}8$ (l.),

$y(100) = 58 – 1{,}12 \cdot 100 + 0{,}008 \cdot 100^2 = 26$ (l.).

Seega: liikudes kiirusega 100 km/h kulub 100 km teelõigul bensiini 7,2 l rohkem. Järelikult 500 km teelõigul $5 \cdot 7{,}2 = 36$ l rohkem, mis teeb $36 \cdot 1{,}02 =$ € 36,72.

Näide 8

Firma kulutab x tooteühiku (näiteks, teleri) valmistamiseks $y = x^3 + 2000x + 40\,000$ EEK. Firma müüb oma toodangut hinnaga 9 500 EEK. Mitu toodet peab firma valmistama ja müüma, et saadav kasum oleks maksimaalne?

Lahendus

Kasum = Tulu – Kulu

Olgu kasumi funktsioon $K(x)$;

Tulu : $9\,500 \cdot x$,

Kulu: $x^3 + 2000x + 40\,000$.

Siis kasum näeb välja järgmiselt: $K(x) = 9\,500 \cdot x – (x^3 + 2000x + 40\,000)$.

Ülesanne eesmärgiks on maksimiseerida kasumit, ehk

$$K(x) = 9\,500 \cdot x – (x^3 + 2000x + 40\,000) \rightarrow \max.$$

Ülesanne kuulub ekstreemumülesannete hulka, järelikult saab lahendada tuletiste abil.

$K(x) = 9\,500 \cdot x – x^3 - 2000x - 40\,000 = - x^3 + 7500x – 40\,000$.

Leiame tuletise: $K'(x) = - 3x^2 + 7500$.

Ekstreemumi olemasoleku tarvilikuks tingimuseks on $y' = 0$, ehk : $K'(x) = - 3x^2 + 7500 = 0$.

Lahendame võrrandi - $3x^2 + 7500 = 0$

$x^2 = 2500 \Rightarrow x = \pm 50$ (toodete arv ei saa olla negatiivne, vaatleme ainult $x = 50$).

Uurime ekstrremumit, näiteks teist järku tuletise abil :

$$K''(x) = -6x$$

Asendame $x = 50$: $K''(50) = -6\cdot 50 = -300 < 0$.

Kui teist järku tuletis on punktis negatiivne, siis selles punktis on max (kui on positiivne, siis punktis on min).

Vastus. Toodete maht $x = 50$ annab maksimaalse kasumi ($K(50) = -50^3 + 7500\cdot 50 - 40\,000 = 210\,000$ EEK).

Näide 9

Kerasse, mille raadius on R, on kujundatud suurima ruumalaga silinder. Leia selle silindri kõrgus.

Lahendus.

1) Tähistame: R-kera raadius, r-silindri põhja raadius, H-silindri kõrgus

2) Funktsioon, milles on tarvis leida ekstreemumkohta on silindri ruumala: $V = \pi r^2 \cdot H$, funktsioon sisaldab kahte muutujat (H ja r), üks neist tuleb kaotada.

3) Pythagorase teoreemi järgi $r^2 = R^2 - \frac{H^2}{4}$

4) Asendan punktis 3) saadud tulemuse ruumala valemisse, et saada ühe tundmatuga funktsioon

$$V = \pi\left(R^2 - \frac{H^2}{4}\right)\cdot H = \pi R^2 H - \frac{\pi H^3}{4}.$$

5) Võtan tuletise H kaudu (H on tundmatu, R on konstant) $V'(H) = \left(\pi R^2 H - \frac{\pi H^3}{4}\right)' = \pi R^2 - \frac{3\pi H^2}{4}$

6) Leian ekstreemumkoha, st $V'(H) = 0 \Rightarrow \pi R^2 - \frac{3\pi H^2}{4} = 0 \Rightarrow \frac{3\pi H^2}{4} = \pi R^2 \ \Big|: \frac{3\pi}{4} \ \Rightarrow H^2 = \frac{4R^2}{3} \ \Big|\sqrt{\ }$

$\Rightarrow H = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$.

Näide 10

Traadist, mille pikkus on 90 cm, on tarvis valmistada korrapärase kolmnurkse prisma mudel. Kui suur peab olema prisma põhiserv, et prisma külgpindala oleks suurim?

Lahendus. Olgu korrapärase kolmnurkse prisma põhiserv *a* ja kõrgus *h*. Sellel prismal on 6 põhiserva ja 3 külgserva. Taadi pikkus on 90 cm, saame seose

$$6a+3h=90$$

ehk

$$2a+h=30.$$

Prisma põhja ümbermõõt on 3*a* ja prisma külgpindala $S_k=3ah$.

Seosest $2a+h=30$ saame, et $h=30-2a$. Asendame selle prisma külgpindala valemisse.

$$S_k=3a(30-2a)=90a-6a^2.$$

Vaatleme külgpindala S_k kui funktsiooni, mille argumendiks on *a*. Antud ülesandes tuleb leida niisugune põhiserva *a* väärtus, mille korral S_k oleks maksimaalne. Avaldame S_k'.

$$S_k'=90-6\cdot 2a=90-12a.$$

Lahendades võrrandi $S_k'=0$, saame

$$90-12a=0 \quad \Rightarrow \quad a=7{,}5.$$

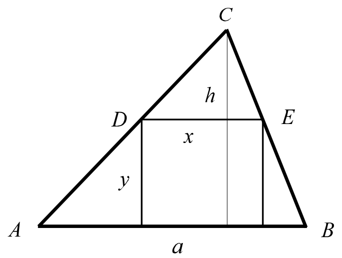
Uurime funktsiooni S_k teise tuletise märki.

Et $S_k''=-12<0$, siis $a=7{,}5$ on funktsiooni S_k maksimumkoht.

Vastus. Prisma külgpindala on suurim, kui põhiserv on 7,5 cm.

Näide 11. Kolmnurka, mille alus on *a* ja kõrgus on *h*, on joonestatud ristkülik nii, et selle külg asub kolmnurga alusel. Leida ristküliku mõõtmed, kui tema pindala on maksimaalne.

Lahendus.



Tähistame ristküliku küljed tähtedega x ja y. Siis ristküliku pindala

$$S = xy.$$

Kolmnurgad ΔABC ja ΔDEC on sarnased kolmnurgad (vt. joonist), järelikult nende kolmnurkade aluste suhe võrdub kõrguste suhtega, seega

$$\frac{a}{x} = \frac{h}{h-y},$$

millest avaldame y.

$$a(h-y) = hx,$$
$$ah - ay = hx,$$
$$ay = ah - hx,$$

$$y = \frac{ah-hx}{a} = h - \frac{h}{a}x.$$

Järelikult ristküliku pindala avaldub argumendi x funktsioonina järgmiselt:

$$S(x) = hx - \frac{h}{a}x^2.$$

Ristküliku pindala saab olla maksimaalne argumendi x nende väärtuste korral, mille puhul $S'(x) = 0$. Leiame funktsiooni tuletise ja tuletise nullkoha.

$$S'(x) = h - \frac{h}{a}\cdot 2x = h - \frac{2h}{a}x,$$
$$h - \frac{2h}{a}x = 0,$$
$$h = \frac{2h}{a}x \,\Big|\, : h,$$

millest saame, et tuletise nullkoht on $x = \frac{a}{2}$.

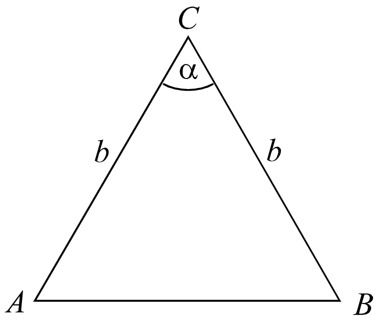
Funktsiooni $S(x)$ teine tuletis $S''(x) = -\frac{2h}{a} < 0$, seega $x = \frac{a}{2}$ on selle funktsiooni maksimumkoht.

Leiame veel $y = h - \frac{h}{a}x = h - \frac{h}{\cancel{a}_1}\cdot\frac{\cancel{a}^1}{2} = h - \frac{h}{2} = \frac{h}{2}.$

Vastus. Ristküliku mõõtmed on $\frac{a}{2}$ ja $\frac{h}{2}$.

Näide 12. Võrdhaarse kolmnurga haar on b. Missuguse tipunurga korral on selle kolmnurga pindala maksimaalne?

Lahendus.



Kolmnurga pindala võrdub poolega kahe külje ja nende vahelise nurga siinuse korrutisest, seega

$$S(\alpha)=\frac{1}{2}b^2\sin\alpha.$$

Leiame viimasest tuletise nurga α järgi.

$$S'(\alpha)=\frac{1}{2}b^2\cos\alpha.$$

Kolmnurga pindala on maksimaalne tipunurga α selle väärtuse korral, mille puhul $S'(\alpha)=0$. Saame, et sel juhul peab $\cos\alpha=0$ ehk $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

Uurime funktsiooni $S(\alpha)$ teise tuletise märki.

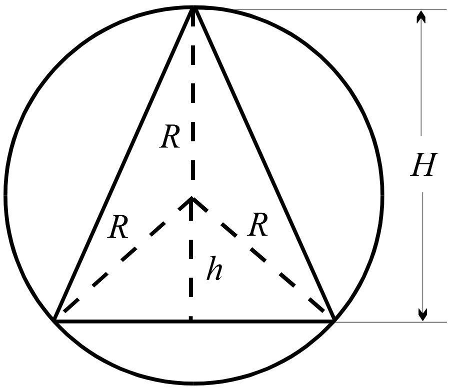
$$S''(\alpha)=-\frac{1}{2}b^2\sin\alpha\ ,\ S''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}b^2<0\,,$$

seega kohal $\alpha=\frac{\pi}{2}$ on funktsioonil $S(\alpha)$ maksimum.

Vastus. Kolmnurga pindala on maksimaalne, kui tipunurk $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

Näide 13. Leida kerasse raadiusega R kujundatud suurima võimaliku ruumalaga koonuse kõrgus.

Lahendus.



Joonisel on kujutatud läbilõige sellest kehast.

Koonuse ruumala $V = \frac{1}{3}\pi r^2 H,$ kus r on koonuse põhja raadius ja H on koonuse kõrgus.

$$h = H - R \text{ (vt. joonist).}$$

Pythagorase teoreemi kohaselt

$$r^2 = R^2 - h^2 = R^2 - (H-R)^2 =$$
$$= R^2 - \left(H^2 - 2RH + R^2\right) = 2RH - H^2 .$$

Asendame saadud r^2 avaldise koonuse ruumala $V = \frac{1}{3}\pi\, r^2 H$ avaldisse ja saame, et

$$V(H) = \frac{1}{3}\pi(2RH - H^2)H = \frac{2}{3}\pi RH^2 - \frac{1}{3}\pi H^3 .$$

Leiame sellest tuletise kõrguse H järgi:

$$V'(H) = \frac{2}{3}\pi\, R \cdot 2H - \frac{1}{3}\pi \cdot 3H^2 =$$
$$= \frac{4}{3}\pi\, RH - \pi\, H^2 = \pi\, H(\frac{4}{3}R - H),$$

millest $V'\left(H\right) = 0$, kui $\frac{4}{3}R - H = 0$ ehk $H = \frac{4}{3}R.$

Uurime funktsiooni $V(H)$ teise tuletise märki.

$$V''(H) = \frac{4}{3}\pi R - \pi \cdot 2H = \frac{4}{3}\pi R - 2\pi H$$

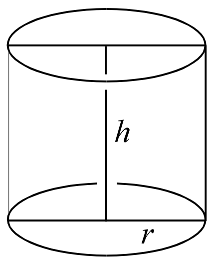
ja

$$V''\left(\frac{4}{3}R\right) = \frac{4}{3}\pi R - 2\pi \cdot \frac{4}{3}R = \frac{4}{3}\pi R - \frac{8}{3}\pi R = -\frac{4}{3}\pi R < 0.$$

Vastus. Suurima ruumalaga koonuse kõrgus on $\frac{4}{3}R$.

Näide 14. Silindri ruumala on V. Leida selline seos silindri raadiuse r ja kõrguse h vahel, mille korral selle silindri täispindala on vähim.

Lahendus.



Silindri ruumala on $V = \pi r^2 h$, millest $h = \frac{V}{\pi r^2}$.

Silindri täispindala on

$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + 2V\frac{1}{r}.$$

Leiame viimasest tuletise põhja raadiuse r järgi.

$$S'(r) = 4\pi r + 2V \cdot \left(-\frac{1}{r^2}\right) = 2 \cdot \frac{2\pi r^3 - V}{r^2}.$$

Saadud tuletis on võrdne nulliga, kui murru lugeja $2\pi r^3 - V = 0$ ehk $V = 2\pi r^3$.

Asendades selle võrdusesse $h = \frac{V}{\pi r^2}$, saame, et $h = \frac{2\pi r^3}{\pi r^2} = 2r$.

Vastus. Seos silindri kõrguse ja põhja raadiuse vahel on $h = 2r$.