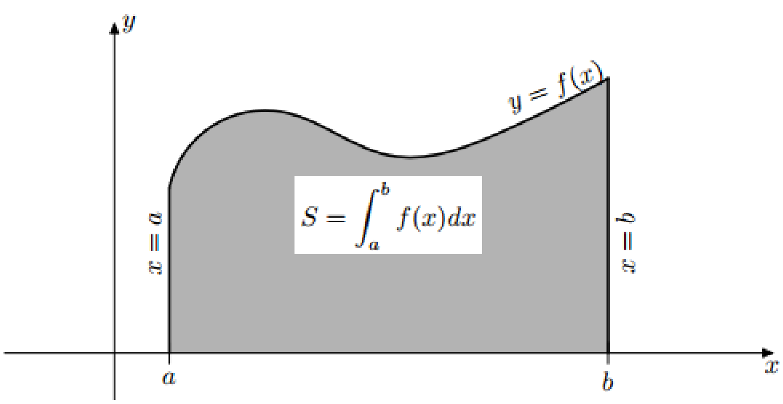
MÄÄRATUD INTEGRAALI RAKENDUSED (1)

Probleem – leida funktsioon tema tuletise järgi – on ajalooliselt väga lähedalt seotud tasandilise kujundi pindala määramise ülesandega. Elementaarmatemaatikas vaadeldakse ainult sirglõikude ja ringi kaartega piiratud tasandiliste kujundite pindala. Suvalise joonega piiratud tasandilise kujundi pindala defineerimiseks ja arvutamiseks osutuvad aga elementaarmatemaatika meetodid puudulikuks. Siin tuleb appi integraal.

Tasandilise kujundi pindala arvutamine

I juhtum

Kui lõigul $[a;b]$ funktsioon $f(x) \geq 0$, siis määratud integraal tähendab geomeetriliselt niisuguse kõvertrapetsi pindala, mis on piiratud alt x-teljega, ülalt funktsiooni $y = f(x)$ graafikuga, vasakult sirgega $x = a$ ja paremalt sirgega $x = b$.

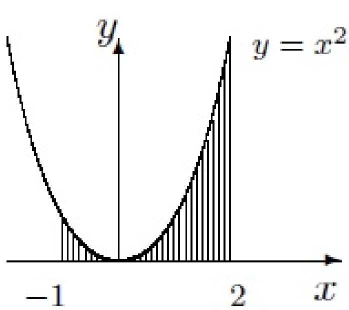


Joonisel esitatud kõvertarapetsi pindala on

$$S_{abBA} = \int_a^b f(x)dx$$

Näide 1

Arvutada tasandilise kujundi pindala, mis on piiratud parabooliga $y = x^2$ ja x-teljega vahemikus $-1 \leq x \leq 2$.



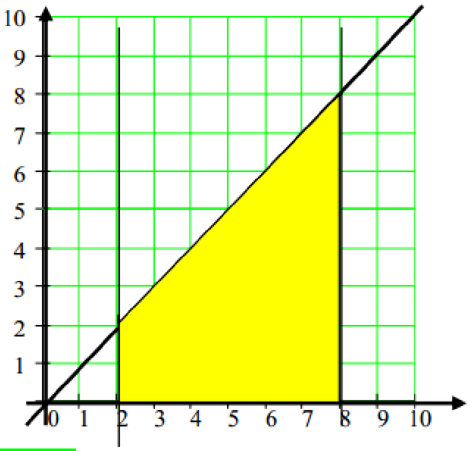
Joonistades vaadeldava kujundi näeme, et argumendi rajad on *-1* ja *2*. Siis moodustame integraali

$$S = \int_{-1}^{2} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 3.$$

Näide 2

Leida sirgetega x = 2, x = 8, y = 0 ja y = x piiratud kujundi pindala.

Leida sirgetega $x = 2$, $x = 8$, $y = 0$ ja $y = x$ piiratud kujundi pindala.



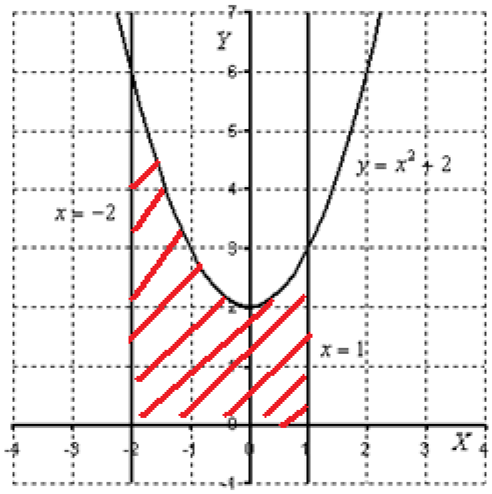
Antud ülesanded on rajad $a = 2$ ja $b = 8$ ning $f(x) = x$

$$S = \int_2^8 x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_2^8 = \frac{64}{2} - \frac{4}{2} = 30.$$

Kuna tegu on tegelikult täisnurkse trapetsiga, siis kasutades trapetsi pindala valemit, saame samuti vastuseks $S = \frac{2+8}{2} \cdot 6 = 30$.

Näide 3

Leida joontega $y = x^2 + 2, y = 0, x = -2, x = 1$ piiratud kujundi pindala

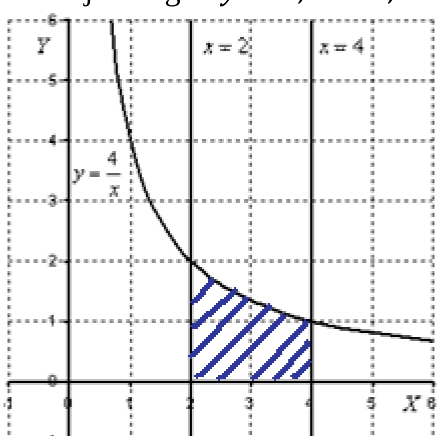


$$S = \int_{-2}^{1} (x^2 + 2)dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2x\right)\Big|_{-2}^{1} =$$

$$\frac{1}{3} + 2 - \left(-\frac{8}{3} - 4\right) = \frac{1}{3} + 2 + \frac{8}{3} + 4 = 9$$

Näide 4

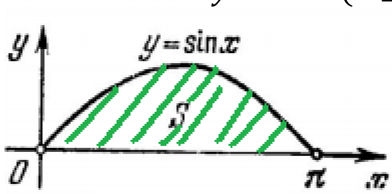
Leida joontega $xy = 4, x = 2, x = 4$ ning x-teljega piiratud kujundi pindala



$$S = \int_2^4 \frac{4dx}{x} = 4(\ln x)\Big|_2^4 = 4(\ln 4 - \ln 2) = 4\ln\frac{4}{2} = 4\ln 2$$

Näide 5

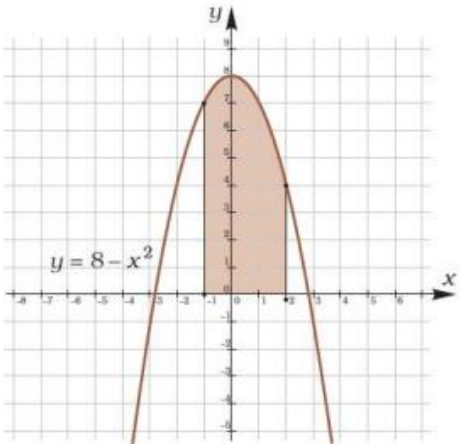
Leida funktsiooni $y = sinx$ $(0 \leq \pi \leq)$ “ühe laine” pindala



$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = 2$$

Näide 6

Arvutada tasandilise kujundi pindala, mis on piiratud parabooliga $y = 8 - x^2$ ja x-teljega vahemikus $-1 \leq x \leq 2$.

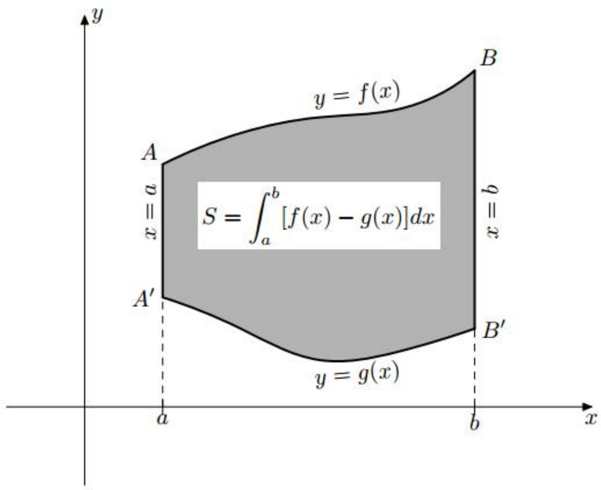


$$\int_{-1}^{2}(8-x^2)dx = \left(8x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \left(8\cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(8\cdot(-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right) = 13\frac{1}{3} - \left(-7\frac{2}{3}\right) = 21$$

Kõvertrapetsi pindala on 21 $ü^2$.

II juhtum

Järgnevalt vaatleme kõvertrapetsit, mis ei ole alt piiratud x-teljega, vaidfunktsiooni y = g(x) graafikuga. Piirkond on kujutatud joonisel.



Ilmselt on kõvertrapetsi A\`B\`BA pindala kõvertrapetsite abBA ja abB\`A\` pindalade vahe.
Seega kõvertraprtsi A\`B\`BA pindala on

$$\boxed{S_{A'B'BA} = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.}$$

NB!See valem kehtib ka siis, kui mõlemad jooned asuvad allpool x-telge või kui jooned asuvad erineval pool x-telge.

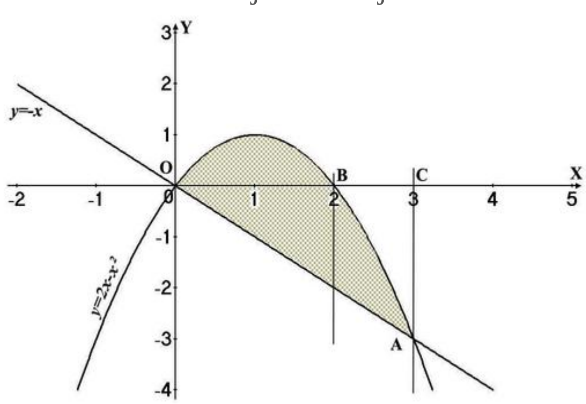
Näide 7

Leida joontega

$$y = 2x - x^2, \quad x + y = 0$$

piiratud kujundi pindala.

Joonestame mõlemad jooned teljestikku. Kasutame valemit viimast valemit.



$$S = \int_0^3 \left(2x - x^2 - (-x)\right)dx = \int_0^3 \left(3x - x^2\right)dx =$$

$$= \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^3 = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{9}{2}.$$

V: kujundi pindaa on 4,5 $üh^2$.

Näide 8

Leida joontega $y = x^2$ ja $y = \sqrt{x}$ piiratud kujundi pindala

Leiame joonet lõikepunktid (integreerimisrajad). Selleks lahendame võrrandi:

$$x^2 = \sqrt{x},$$

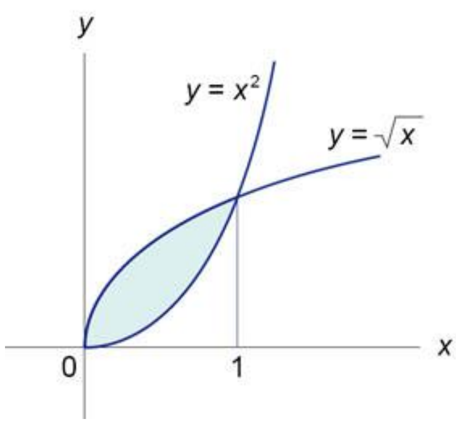
$$\Rightarrow \quad x^2 - \sqrt{x} = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{x}\left(x^{3/2} - 1\right) = 0,$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0, \;\; x_2 = 1.$$

Jooned lõikuvad punktides (0; 0) ja (1; 1). Seega kujundipindala võrdub

$$S = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx = \left(\frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{x^3} - x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$



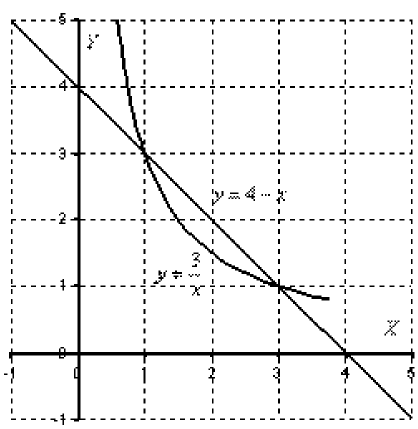
Näide 9

Leida joontega $x + y = 4$ ja $xy = 3$ piiratud kujundi pindala.

Integreerimisrajade leidmiseks on vaja lahendada võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases}$$

Esimesest võrrandist: y= 4-x, asendades teisse võrrandisse saame $x(4 - x) = 3$. Selle ruutvõrrandilahenditeks on 1 ja 3. Ning vastavad y-i väärtused on 3 ja 1.



$$S = \int_1^3 \left(4 - x - \frac{3}{x}\right)dx = \left(4x - \frac{x^2}{2} - 3\ln|x|\right)\Big|_1^3 =$$

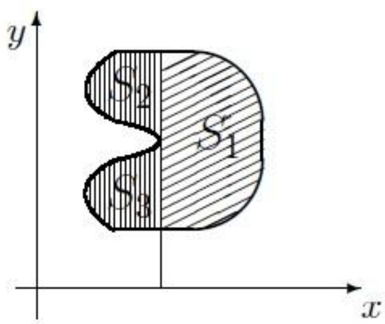
$$= 12 - \frac{9}{2} - 3\ln 3 - \left(4 - \frac{1}{2} - 0\right) =$$

$$= \frac{15}{2} - 3\ln 3 - \frac{7}{2} = 4 - 3\ln 3$$

III juhtum

Juhul, kui tasandilist kujundit saab jaotada n kõvertrapetsiks (vt joonist), siis kujundi pindala S võrdub üksikute kõvertrapetsite pindalade summaga

$$S = S_1 + S_2 + \cdots + S_n.$$

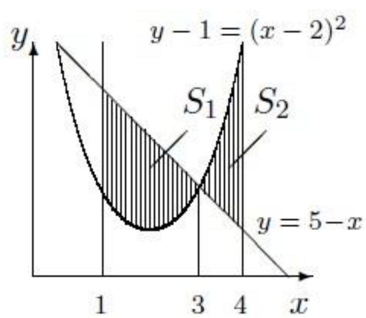


Näide 10

Arvutada kujundi pindala, mis on piiratud joontega

$$y = 5 - x,\ y = x^2 - 4x + 5,\ x = 1,\ x = 4.$$

Joon $y=x^2-4x+5$ on parabool. Parabooli kujundamiseks on vaja teada haripunkti. Siis teisendame antud funktsiooni täisruuduks muutuja x suhtes, s.o $y-1=(x-2)^2$.



Seega parabooli haripunktiks on *(2;1)*. Joonistades vaadeldava kujundi, näeme et see koosneb kahest osast. Esimene neist tekib, kui $1 \le x \le 3$ ja teine kui $3 \le x \le 4$. Siin lõikepunkt $x = 3$ oli leitud süsteemist

$$\begin{cases} y-1=(x-2)^2, \\ y=5-x. \end{cases}$$

Arvutame pindalad S_1 ja S_2

$$S_1 = \int_1^3 \left[(5-x)-(x^2-4x+5)\right]dx = \frac{10}{3},$$

$$S_2 = \int_3^4 \left[(x^2-4x+5)-(5-x)\right]dx = \frac{11}{6}.$$

Järelikult

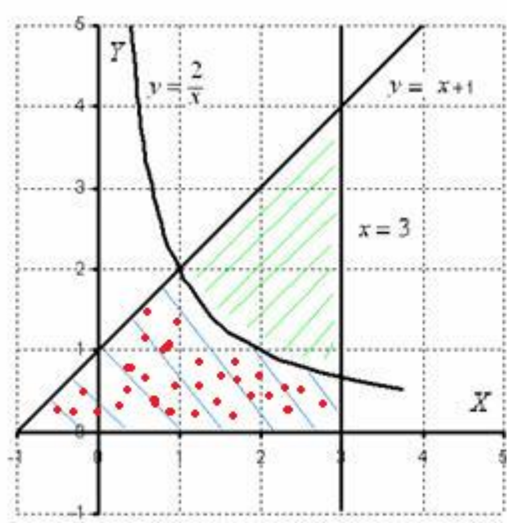
$$S = S_1 + S_2 = \frac{31}{6}.$$

Näide 11

Leida joontega $y = \frac{2}{x}$, $y = x + 1$, $y = 0$, $x = 3$ piiratud kujundi pindala.
Otsitav pindala (punane) on kahe kujundi pindala summa:

1) lõigul $[-1;1]$ x-telje peal on funktsiooni $y = x + 1$ graafik

2) lõigul $[1;3]$ x-telej peal on funktsioni $y = \frac{2}{x}$ graafik.



Seega

$$S=\int_{-1}^{1}(x+1)dx+\int_{1}^{3}\frac{2dx}{x}=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{-1}^{1}+2(\ln x)\Big|_1^3=\frac{1}{2}+1-\left(\frac{1}{2}-1\right)+2(\ln 3-\ln 1)=$$

$$=\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}+1+2(\ln 3-0)=2+2\ln 3=2(1+\ln 3)$$

Vastus: $S=2(1+ln3)\approx 4{,}2$üh^2

IV juhtum (juhtumi II järeldus, kui $f(x)=0$ ehk y-telg)

Olgu antud pidev funktsioon f(x)<0 lõigus [a;b]. Järelikult

$$S=\int_a^b -f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$$.

Integreerides lõigus [a;b] funktsiooni f(x)<0, saame vastava (allpool x-telge asuva) **kõvertrapetsi pindala vastandarvu**. Seega allpool x-telge asuva kõvertrapetsi pindala saamiseks tuleb võtta integraali absoluutväärtus või vahetada integreerides rajad.

Näide 12

Leia kõvertrapetsi pindala, mida piiravad jooned y = -0,5x^2 + 2x - 3, x = -1, x = 3 ja y = 0

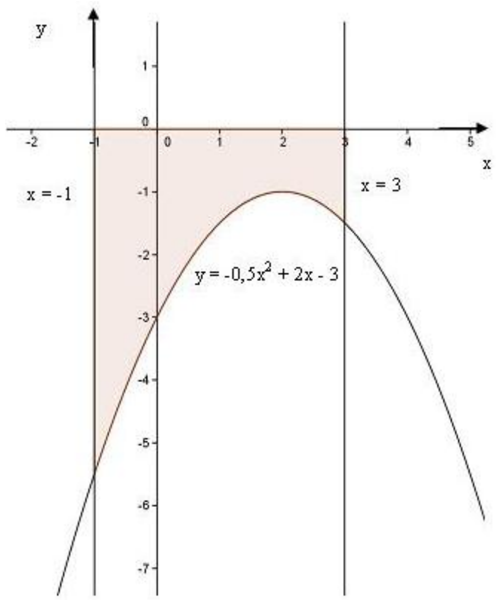
Lahendus:

Kui kõvertrapets asub allpool x-telge, siis on pindalaks määratud integraali absoluutväärtus. Selle arvutamiseks võib aga ka vahetada rajad.

Kui me arvutaksime rajades -1st kuni 3-ni, saakisime tulemuseks negatiivse arvu. Pindala aga ei saa olla negatiivne. Seega algul arvutame integraali (rajades -1 kuni 3) ning pindala vastuse andes võtame saadud arvu absoluutväärtuse.

$$\int_{-1}^{3}\left(-\frac{x^2}{2}+2x-3\right)dx=\left(-\frac{x^3}{6}+x^2-3x\right)\Bigg|_{-1}^{3}=$$

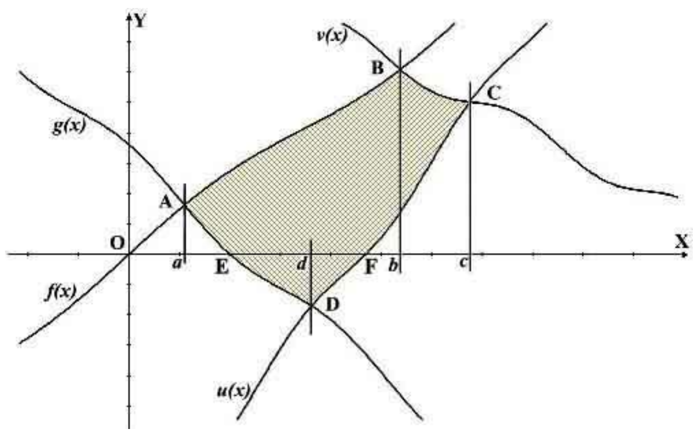
$$=-\frac{3^3}{6}+3^2-3\cdot 3+\frac{(-1)^3}{6}-(-1)^2+3\cdot(-1)=-8\frac{2}{3}$$



Vastus: Kõvertrapetsi pindala on $8\frac{2}{3}$ pindalaühikut.

V juhtum (juhtumite III ja IV järeldus)

Juhul kui kujundi pindala on piiratud mitme joonega (vt nt joonist), siis tuleb vaadelda iga kujundi osa, nt mis vastab ühele funktsioonile või funktsioonide vahele. Joonisel oleva kujundi pindal võrdub (nt):



$$S_{ABCD}=\int_a^b f(x)dx-\int_a^d g(x)dx+\int_b^c v(x)dx-\int_d^c u(x)dx$$

või

$$S_{ABCD}=\int_a^d [f(x)-g(x)]\,dx+\int_d^b [f(x)-u(x)]\,dx+\int_b^c [v(x)-u(x)]\,dx$$

VI juhtum

Funktsiooni parameetriline esitusviis (kordamine):

Üheks funktsiooni analüütiliseks esitusviisiks on funktsiooni parameetriline esitusviis. Parameetrilise esitusviisi korral ei ole kaks muutujat x ja y omavahel otseselt võrdusega seotud, vaid on seotud läbi kolmanda muutuja, nn parameetri t. Parameetrilise esitusviis on üldjuhul

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

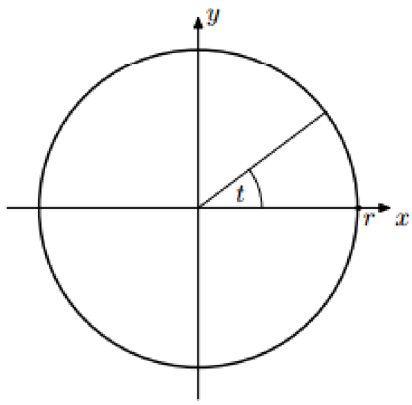
Parameetrilisel kujul on võimalik esitada kõiki funktsioone.
Funktisooni $y = x^2$ parameetriliseks esitusviisiks on

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$$

Funktsiooni $x^2 + y^2 = r^2$ parameetriliseks esitusviisiks on

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$$

Selles esitusviisis on parameetriks t joonisel näidatud nurk.



Joonis Parameetri t tähendus

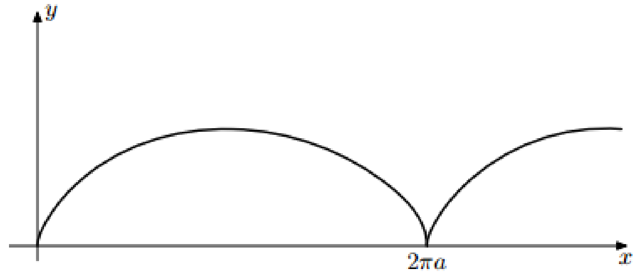
Funktsiooni $y = x^2$ parameetrilist esitusviisi tavaliselt ei kasutata, sellel puudub mõte. Küll aga kasutatakse funktsiooni $x^2 + y^2 = r^2$ parameetrilist esitusviisi.
On funktsioone, millele ainsaks mõistlikuks esitusviisiks on parameetriline esitusviis.

Näide 12

Vaatleme parameetrilisel kujul esitatud funktsiooni

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

Funktsiooni graafikuks on tsükliline joon, mida nimetatakse tsükloidiks. Tsükloid on joon, mille kirjeldab ringjoone raadiusega a üks punkt, mis algasendis asub koordinaatide alguspunktis, kui panna ringjoon veerema mööda x-telge. Sellisel juhul on funktsiooni parameetrilises esitusviisis parameetriks t selle ringjoone pöördenurk algasendi suhtes.



Joonis Tsükloid

Kui joon *y* = *f(x)* on antud parameetriliste võrranditega

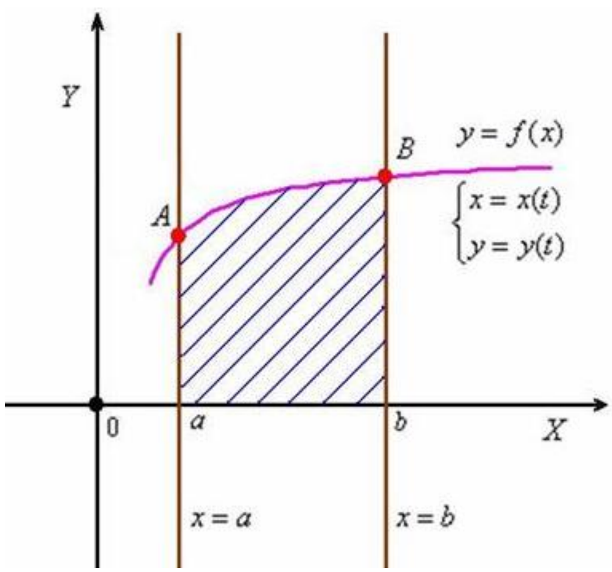
$$x = x(t), y = y(t), t \in [t_1;\ t_2]$$

siis teeme pindala valemis $S = \int_a^b f(x)dx$ muutujate vahetuse

$$x = x(t),\ \text{siis}\ dx = \dot{x}(t)dt,\ \text{ja}\ y = y(t).$$

Pindala arvutamise valem omab kuju

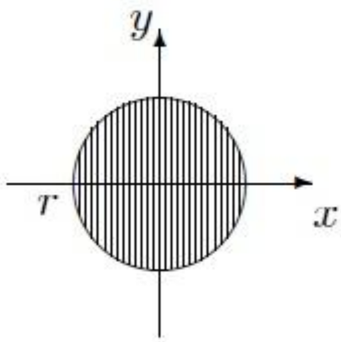
$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)d(x(t)) = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t)dt$$



Näide 13

Leida ringi pindala, kui ringi raadius on r.

Lahendus. Paigutame ringi *xy*-tasandil keskpunktiga koordinaatide alguspunkti.



Piisab, kui leiame esimeses veerandis oleva ringi sa pindala ja hiljem korrutame selle neljaga. Võtame ringi vaadeldavat osa piirava ringjoone võrrandi parameetrilisel kujul

$$x = r\cos t,\ y = r\sin t, t \in [0; \tfrac{\pi}{2}]$$

ja teeme valemis $S = \int_a^b f(x)dx$ muutuja vahetuse

$$x = r\cos t,\ dx = -r\sin t dt,\ y = r\sin t.$$

Et punktile *a* vastab *t = π/2* ja punktile *b* vastab *t = 0*, siis valemi $S = \int_a^b f(x)dx$ põhjal

$$S = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} r\sin t(-r)\sin t dt = 4r^2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \pi r^2.$$