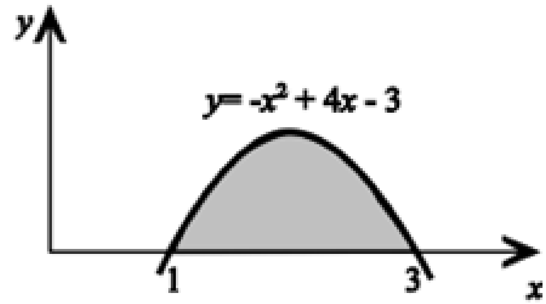
Tasandilise kujundi pindala arvutamine

Ülesanne 1

Leida kujundi pindala, kui kujund on piiratud joontega $y = -x^2 + 4x - 3$ ja y=0



Leiame punktid, kus kõver lõikab x telge. Nendes punktides $y = 0$ ja järelikult tuleb lahendada ruutvõrrand

$$-x^2 + 4x - 3 = 0$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Kasutades taandatud ruutvõrrandi lahendivalemit

$$x = 2 \pm \sqrt{2^2 - 3} = 2 \pm 1, \quad x_1 = 1; \; x_2 = 3.$$

Nüüd, kasutades määratud integraali

$$S = \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x\right]_1^3 = (-9 + 18 - 9) - \left(-\frac{1}{3} + 2 - 3\right) = \frac{4}{3}$$

Ülesanne 2

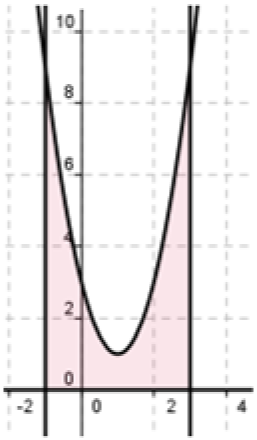
Leida kujundi pindala, kui kujund on piiratud joontega $x = -1, x = 3, y = 0, y = 2x^2 - 4x + 3$.

Lahendus:

Joonise tegemiseks on vaja leida parabooli haripunkt. Me mööname, et kui on teada funktsiooni nullkohad x_1 ja x_2, siis saame haripunkti abstsissi valemi $x_h = \frac{x_1 + x_2}{2}$ järgi. Siin aga on diskriminant negatiivne ($D = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = -8 < 0$) ja ruutvõrrand seega ei lahendu. Siis tuleb leida x-teljega paralleelne sirge ja lahendada võrrandisüsteem $\begin{cases} y = 2x^2 - 4x + 3 \\ y = 3 \end{cases}$, siit $2x^2 - 4x = 0$; $2x(x-2) = 0$; $x_1 = 0$ ja $x_2 = 2$, siis $x_h = \frac{0+2}{2} = 1$. Muidugi, .

saame ekstreemkoha esimese tuletise nullkoha abil hoopis hõlpsamini $y' = 4x - 4$, siit $4x - 4 = 0$, $x_h = 1$. Koostame tabeli ja arvutame funktsiooni väärtused, teeme joonise.

x	-1	0	1	2	3
y	9	3	1	3	9



Leiame pindala: $S = \int_{-1}^{3} [2x^2 - 4x + 3 - 0] dx =$

$= \left[\frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_{-1}^{3} = 18 - 18 + 9 + \frac{2}{3} + 2 + 3 = 14\frac{2}{3}$ pindalaühikut.

Ülesanne 3

Leida joontega $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ ja $y = 2x$ piiratud kujundi pindala.

Lahendus.

Joon $y = x^2$ on parabool.

Joon $y = \frac{x^2}{2}$ on parabool.

Joon $y = 2x$ on sirge.

Parabooli $y = x^2$ ja sirge $y = 2x$ lõikepunkti koordinaadid saadakse võrrandisüsteemist $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \end{cases}$. Lahendame selle.

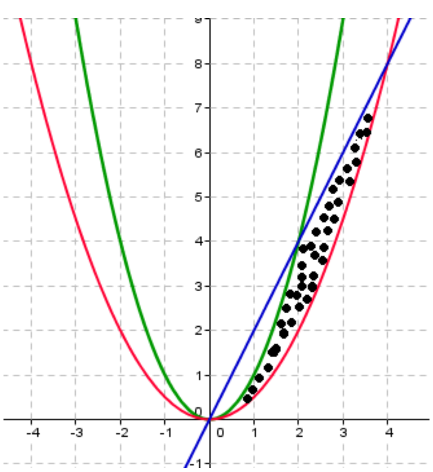
$x^2 = 2x$, $x^2 - 2x = 0$, $x(x-2) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Vastavalt $y_1 = 0$, $y_2 = 4$.

Parabooli $y = \frac{x^2}{2}$ ja sirge $y = 2x$ lõikepunkti koordinaadid saadakse

võrrandisüsteemist $\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} \\ y = 2x \end{cases}$. Lahendame selle.

$\frac{x^2}{2} = 2x$, $x^2 - 4x = 0$, $x(x-4) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. Vastavalt $y_1 = 0$, $y_2 = 8$.

Leitava kujundi pindala koosneb kahest osast, liidame määratud integraalid, mis neid pindalasid arvutavad.

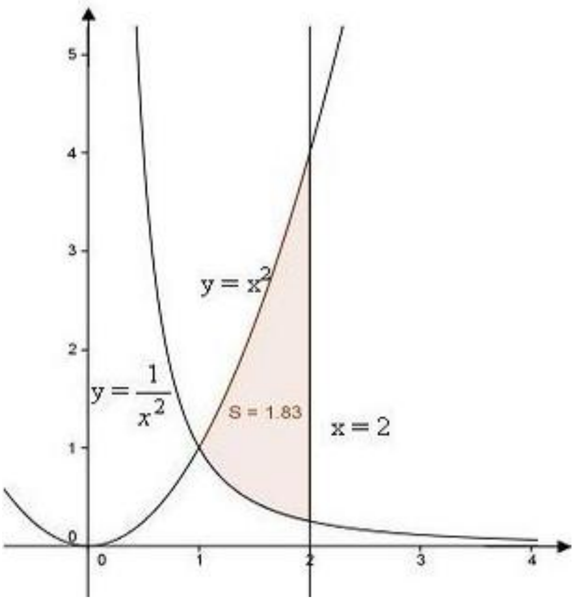


$$S = \int_0^2 \left(x^2 - \frac{x^2}{2} \right) dx + \int_2^4 \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{6} \right) \Bigg|_0^2 + \left(2 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \Bigg|_2^4 = 4.$$

Ülesanne 4

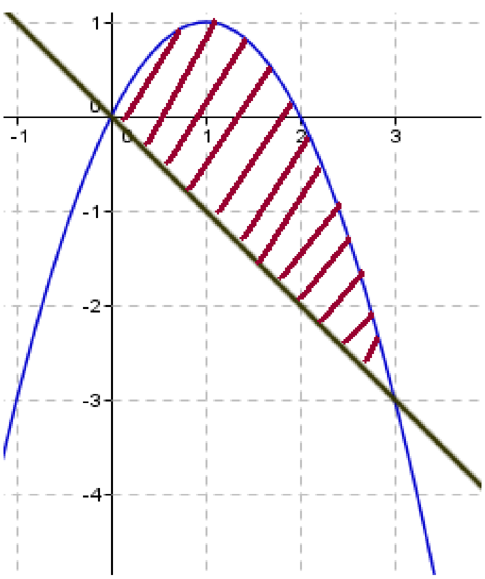
Leia kujundi pindala, kui kujund pn piiratud joontega $y = x^2, y = \frac{1}{x^2}, x = 2$



$$S = \int_1^2 (x^2 - \frac{1}{x^2})dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x}\right)\Big|_1^2 = \frac{8}{3} + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{7}{3} - \frac{1}{2} = 1\frac{5}{6}$$

Ülesanne 5

Leida joontega $y = 2x - x^2$ ja $x + y = 0$ piiratud kujundi pindala.



Lahendus.

Joon $y = 2x - x^2$ on parabool.

Joon $y = -x$ on sirge.

Parabooli $y = 2x - x^2$ ja sirge $y = -x$ lõikepunkti koordinaadid saadakse võrrandisüsteemist $\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = -x \end{cases}$. Lahendame selle.

$2x - x^2 = -x$, $3x - x^2 = 0$, $x(3 - x) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. Vastavalt $y_1 = 0$, $y_2 = -3$.

Leitava kujundi pindala

$$S = \int_0^3 \left(2x - x^2 - (-x)\right)dx =$$

$$= \int_0^3 \left(3x - x^2\right)dx$$

$$= \left(3 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3 = \frac{9}{2}.$$

Ülesanne 6

Leida kolmnurga pindala, kui kolmnurga tipud asuvad punktides (0,0), (2,6) ja (7,1).
Lahendus
Leiame külje OA võrrandi

$$\frac{x - x_O}{x_A - x_O} = \frac{y - y_O}{y_A - y_O},$$

$$\Rightarrow \frac{x-0}{2-0} = \frac{y-0}{6-0},$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{6} \qquad y = 3x.$$

Külje OB võrrand:

$$\frac{x - x_O}{x_B - x_O} = \frac{y - y_O}{y_B - y_O},$$

$$\Rightarrow \frac{x-0}{7-0} = \frac{y-0}{1-0},$$

$$\Rightarrow \frac{x}{7} = \frac{y}{1} \qquad y = \frac{x}{7}.$$

Külje AB võrrand:

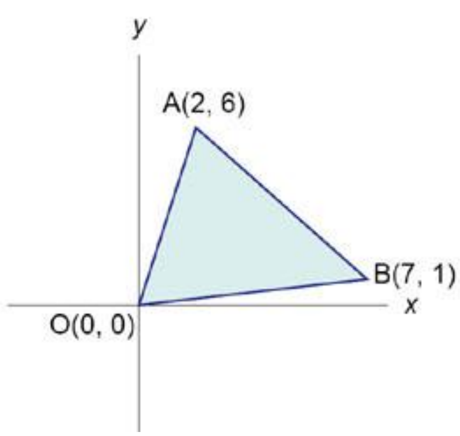
$$\frac{x - x_B}{x_A - x_B} = \frac{y - y_B}{y_A - y_B},$$

$$\Rightarrow \frac{x-2}{7-2} = \frac{y-6}{1-6},$$

$$\Rightarrow \frac{x-2}{5} = \frac{y-6}{-5} \qquad y = 8 - x$$

Jooniselt näeme, et kolmnurga pindala on võrdne kahe integraali summaga:

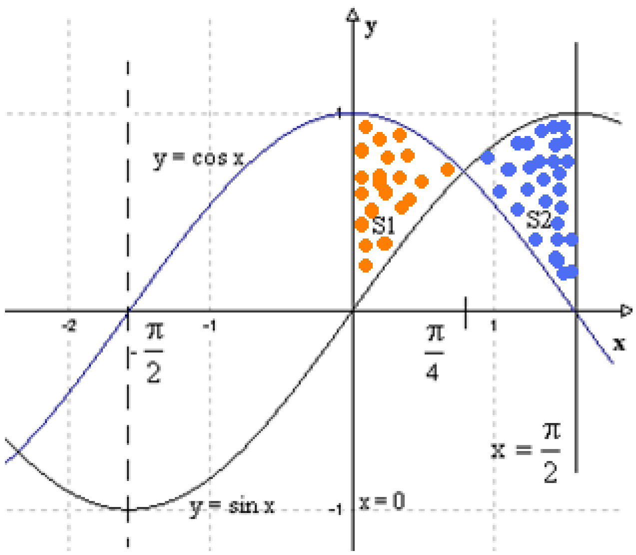
$$S = I_1 + I_2 = \int_0^2 \left(3x - \frac{x}{7}\right)dx + \int_2^7 \left(8 - x - \frac{x}{7}\right)dx = \left(\frac{10x^2}{7}\right)\Bigg|_0^2 + \left(8x - \frac{4x^2}{7}\right)\Bigg|_2^7 = \frac{10\cdot 4}{7} + \left(56 - \frac{4\cdot 49}{7}\right) - \left(16 - \frac{4\cdot 4}{7}\right) = 20.$$



Ülesanne 7

On antud jooned y = sin x ja y = cos x. Leida sirgetega x = 0 ja $x = \frac{\pi}{2}$ ning antud joontega piiratud kujundi pindala.

Lahendus:



Leiame sirgetega y = sin x ja y = cos x piiratud kujundi pindala.

$$S_1 = S_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\,dx$$

$$S = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\,dx = 2 \cdot [\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2 \cdot \left(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} - \sin 0 - \cos 0\right) =$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1\right) = 2\left(\frac{2\sqrt{2}}{2} - 1\right) = 2\sqrt{2} - 2.$$

$S = 2\sqrt{2} - 2$ (pindalaühikut)

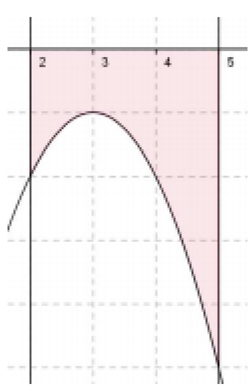
Ülesanne 8

Leida kujundi pindala, kui kujund on piiratud joonega $x = 2, x = 5, y = 0, y = -x^2 + 6x - 10$

Leiame parabooli haripunkti abstsissi: $y' = -2x + 6$, siit $-2x + 6 = 0$; $x_h = 3$.

Koostame tabeli ja teeme joonise:

x	1	2	3	4	5
y	-5	-2	-1	-2	-5



Leiame pindala:

$$S=\int_2^5\left[0-\left(-x^2+6x-10\right)\right]dx=\int_2^5(x^2-6x+10)dx=\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+10x\right]_2^5=6$$ pindalaühikut. Siin on

jooniselt kergesti võimalik vastuse õigsust kontrollida (6 ruutu). Tasub rõhutada, et kui pinnatükk jääb täielikult ülespoole x-teljest, siis nulli lahutamine ei muuda ju midagi; ja kui pinnatükk jääb täielikult allapoole x-teljest, võib nullist lahutamise asemel rajad ära vahetada. Siin

$S=\int_5^2(-x^2+6x-10)dx=6$ pindalaühikut.

Ülesanne 9

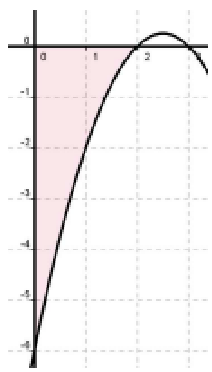
Leida kujundi pindala, ku ikujund on piiratud joontega $x=0, y=o, y=(x-3)(2-x)$

Leiame parabooli haripunkti abstsissi, selleks y=0: $x_1=3$ ja $x_2=2$, siit $x_h=\frac{3+2}{2}=2{,}5$.

Et oleks parem integreerida, teisendame funktsiooni kujule $y=-x^2+5x-6$.

Koostame tabeli ja teeme joonise:

x	1	2	2,5	3	4
y	-2	0	0,25	0	-2



Leiame pindala $S=\int_2^0\left(-x^2+5x-6\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-6x\right]_2^0=\frac{8}{3}-10+12=4\frac{2}{3}$ pindalaühikut.

Siin raja x=0 on ette antud ja raja x=2 leiame nullkohtadest. Rajasid vahetades jääb pinnatükk täielikult allapoole x-telge, saame ruutfunktsiooni integreerides kohe pindala, st ei pea tegema tehet $0-(-x^2+5x-6)$.

Ülesanne 10

Leida kujundi pindala, kui kujund on piiratud joontega

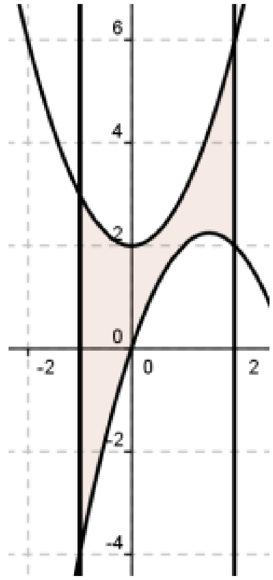
$$x=-1, x=2, y=x^2+2, y=3x-x^2$$

Lahendus:

Paraboolide haripunktid on punktides (0; 2) ja (1,5; 2,25)

Koostame tabel ja teeme joonise:

x	-2	-1	0	1	2
y	6	3	2	3	6
x	0	1	1,5	2	3
y	0	2	2,25	2	0



Arvutame pindala:

$$S = \int_{-1}^{2} \left[x^2 + 2 - (3x - x^2)\right] dx = \int_{-1}^{2} (2x^2 - 3x + 2) dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} = 7{,}5$$

Ülesanne 11

Leida kujundi pindal, kui kujund on piiratud joontega

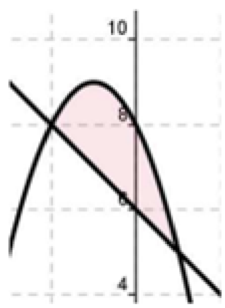
$y=-x^2-2x+8$ ja $y=6-x$

Lahendus:

Leiame parabooli haripunkti abstsissi: $y' = -2x - 2, y' = 0, x_h = -1.$

Koostame tabeli ja teeme joonise:

x	-3	-2	-1	0	1
y	5	8	9	8	5
x	0	6			
y	6	0			



Sirge on määratud kahe punktiga. Leiame rajad:

$$\begin{cases} y = -x^2 - 2x + 8 \\ y = 6 - x \end{cases} \Rightarrow -x^2 - 2x + 8 = 6 - x$$, millest $x^2+x-2=0$ ja rajad on seega $x_1 = -2, x_2 = 1.$

Arvutame pindala:

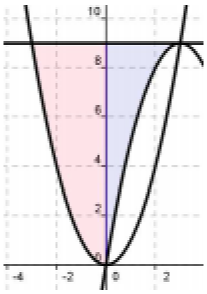
$$S = \int_{-2}^{1} \left[-x^2 - 2x + 8 - (6 - x)\right] dx = \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} = 4{,}5 \text{ pindalaühikut;}$$

Ülesanne 12

Leida kujundi pindala, kui kujund on piiratud joontega

$y=x^2$; $y=6x-x^2$ ja $y=9$.

Lahendus:



Selle pinnatüki pindala koosneb pindalade summast $S = S_1 + S_2$ või vahest $S = S_3 - S_4$.

$$S_1 = \int_{-3}^{0}(9 - x^2)dx = 18 \text{ ja } S_2 = \int_{0}^{3}[9 - (6x - x^2)]dx = 9,$$

$$S_3 = \int_{-3}^{3}(9 - x^2)dx = 36 \text{ ja } S_4 = \int_{0}^{3}(6x - x^2 - x^2)dx = 9.$$

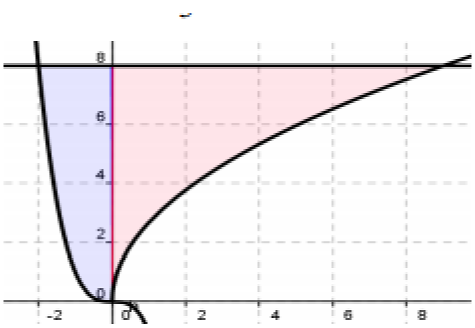
Seega S=27 pindalaühikut.

Ülesanne 13

Leida kujundi pindala, kui kujund on piiratud joontega

$y=-x^3$; $y=\frac{8}{3}\sqrt{x}$ ja $y=8$

Lahendus:



Selle pinnatüki pindala koosneb samuti pindalade summast $S = S_1 + S_2$ või vahest $S = S_3 - (S_4 + S_5)$.

$$S_1 = \int_{-2}^{0}[8 - (-x^3)]dx = 12 \text{ ja } S_2 = \int_{0}^{9}\left(8 - \frac{8}{3}\sqrt{x}\right)dx = 24$$

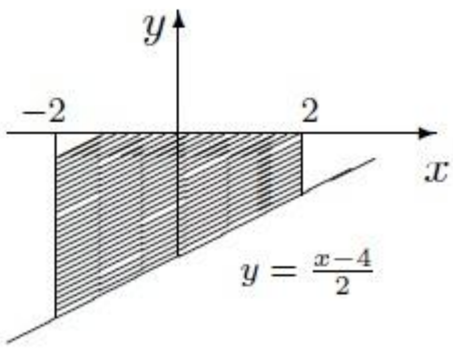
$$S_3 = 8 \cdot 11 = 88 \text{ ja } S_3 = \int_{-2}^{0}(-x^3)dx = 4 \text{ ning}$$

$$S_4 = \int_{0}^{9}\left(\frac{8}{3}\sqrt{x}\right)dx = 48.$$

Ülesanne 14

Leida kujundi pindala, kui kujund on piiratud sirgetega

$$x-2y-4=0,\ x+2=0,\ x-2=0,\ y=0.$$



Joonistame kõigepealt vaadeldava kujundi ja

näeme, et antud lõigul *[-2; 2]* funktsioon

$$y = \frac{x-4}{2}$$

on negatiivne. Siis pindala leidmiseks moodustame integraali antud

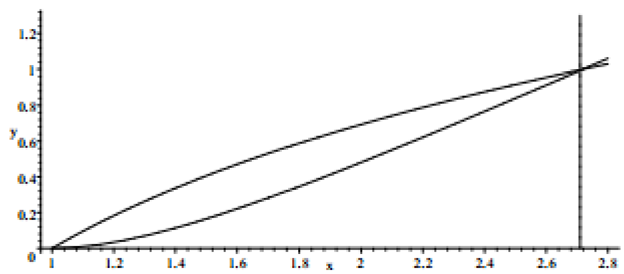
funktsioonist ning tulemuse võtame absoluutväärtusega

$$S = \left| \int_{-2}^{2} \frac{x-4}{2} dx \right|, \text{ kus } \int_{-2}^{2} \frac{x-4}{2} dx = \frac{x^2}{4} - 2x \Big|_{-2}^{2} = -8.$$

Seega S=8.

Ülesanne 15

Leiame joontega $y = \ln x$ ja $y = \ln^2 x$ piiratud kujundi pindala.
Skitseerime joonise



Et

$$\begin{cases} y = \ln x \\ y = \ln^2 x \end{cases} \Rightarrow a = x_1 = 1,\ b = x_2 = e$$

ja

$$\ln^2 x \leq \ln x \quad (x \in [1; e]),$$

siis

$$S = \int_1^e (\ln x - \ln^2 x)\, dx.$$

Leiame esiteks, et

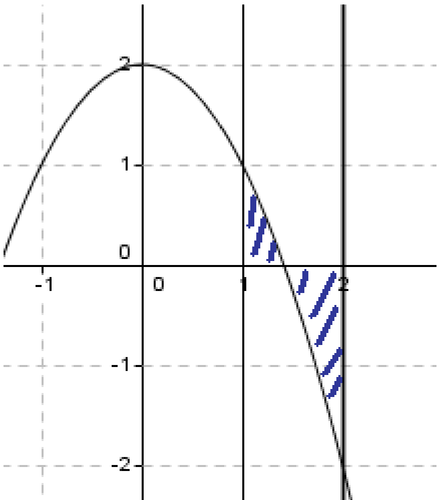
$$\int_1^e \ln^2 x\, dx = \begin{bmatrix} u = \ln^2 x & \vdots & du = \dfrac{2\ln x}{x} dx \\ dv = dx & \vdots & v = x \end{bmatrix} =$$

$$= (x \ln^2 x)\big|_1^e - 2\int_1^e \ln x\, dx = e - 2\int_1^e \ln x\, dx.$$

$$S = 3\int_1^e \ln x\,dx - e = \begin{Bmatrix} ositi \\ integreerimine \end{Bmatrix} = 3\cdot 1 - e + 0 = 3 - e.$$

Ülesanne 16

Leida joontega $= 2 - x^2$, $x = 1$, $x = 2$ piiratud kundi pindala.



Kujund koosneb kahest osast.
Esimese osa pindala on

$$\int_1^{\sqrt{2}} (2 - x^2)dx = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{5}{3}$$

Teise osa pindala on

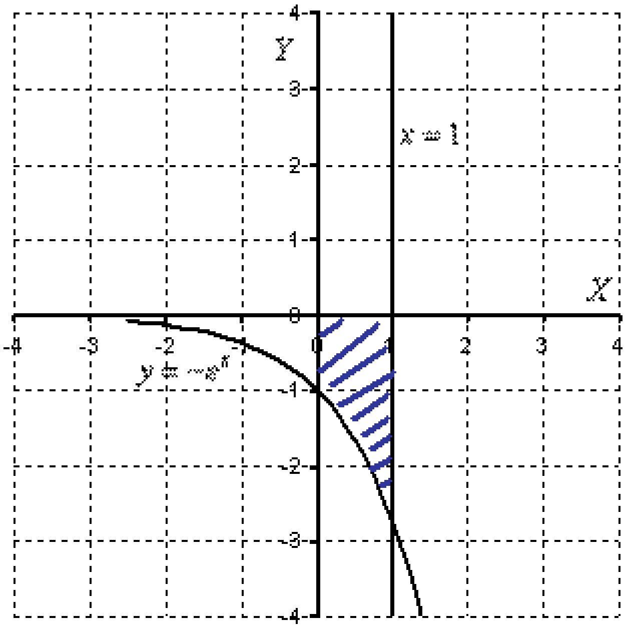
$$-\int_{\sqrt{2}}^{2} (2 - x^2)dx = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{3}$$

Otsitav pindala on

$$S = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{5}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3} - 3\ (\text{üh}^2)$$

Ülesanne 17

Leida joontega $y = -e^x$, $x = 1$ ning koordinaattelgedaga kujundi pindala.



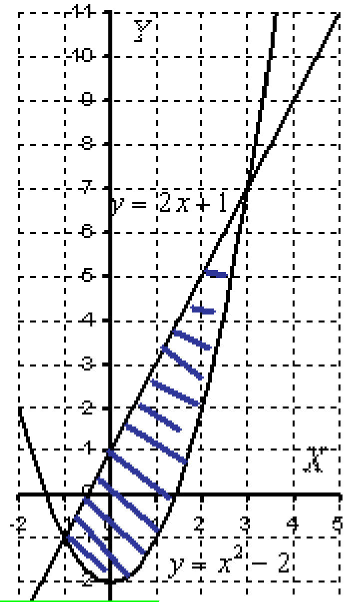
$$S = -\int_0^1 (-e^x)dx = \int_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

Ülesanne 18

Leida joontega

$y = x^2 - 2$, $y = 2x + 1$

piiratud kujundi pindala



$$S=\int_{-1}^{3}\left(2x+1-(x^2-2)\right)dx=\int_{-1}^{3}\left(2x+1-x^2+2\right)dx=$$

$$=\int_{-1}^{3}(3+2x-x^2)dx=\left(3x+x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{3}=$$

$$=(9+9-9)-\left(-3+1+\frac{1}{3}\right)=9+\frac{5}{3}=10\frac{2}{3}$$

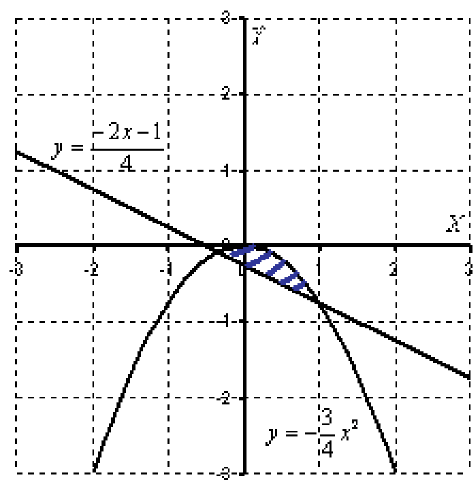
Integreerimisrajad saadusd süsteemi $\begin{cases}x^2-2=y\\2x+1=y\end{cases}$ lahendamise teel

Ülesanne 19

Leida joontega

$3x^2+4y=0$, $2x+4y+1=0$

piiratud kujundi pindala



$$S=\int_{-1/3}^{1}\left(-\frac{3}{4}x^2-\left(-\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)\right)dx=\int_{-1/3}^{1}\left(\frac{1}{4}+\frac{x}{2}-\frac{3}{4}x^2\right)dx=\left(\frac{x}{4}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{4}\right)\Big|_{-1/3}^{1}=$$

$$=\frac{1}{4}(x+x^2-x^3)\Big|_{-1/3}^{1}=\frac{1}{4}\left(1+1-1-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}\right)\right)=\frac{1}{4}\left(1+\frac{5}{27}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{32}{27}=\frac{8}{27}$$

Integreerimisrajad on leidud võrrandist

$$\frac{-2x-1}{4}=-\frac{3}{4}x^2$$

$$3x^2=2x+1$$

$$3x^2-2x-1=0$$

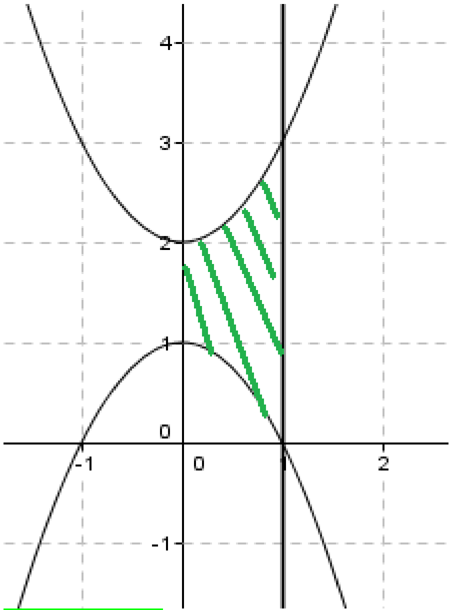
$$D=4+12=16;\ \sqrt{D}=4$$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm4}{6}$$

$x_1=-\frac{1}{3}$, $x_2=1$

Ülesanne 20

Leida joontega $y=1-x^2$, $y=x^2-2$, x=0, x=1



$$S = \int_0^1 [(1 - x^2) - (x^2 - 2)]\, dx = \frac{5}{3}$$

Integreerimisrajad on saadud süsteemi $\begin{cases} y = 1 - x^2 \\ y = x^2 - 2 \end{cases}$ lahendamise teel.

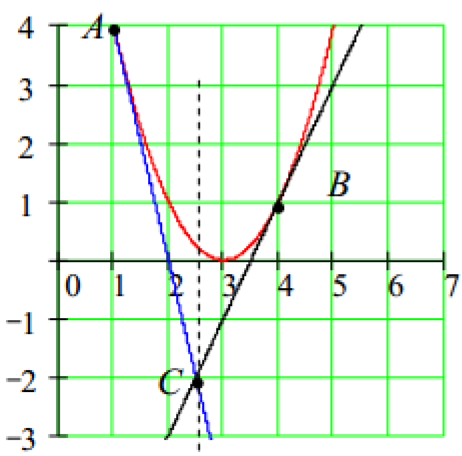
Ülesanne 21

Leida joontega

$$y = x^2 - 6x + 9, \quad y = -4x + 8 \text{ ja } y = 2x - 7$$

piiratud kujundi pindala.

Teeme joonise



Leiame ruutfunktsiooni nullkohad: $x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 0$, seega $x = 3$.
Joonistame sirgete $y = -4x + 8$ ja $y = 2x - 7$ graafikud.
Leiame vastavate graafikute lõikepunktid:

A: $\begin{cases} y = x^2 - 6x + 9 \\ y = -4x + 8 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow A(1; 4)$

B: $\begin{cases} y = x^2 - 6x + 9 \\ y = 2x - 7 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow B(4; 1)$

C: $\begin{cases} y = -4x + 8 \\ y = 2x - 7 \end{cases} \Rightarrow -4x + 8 = 2x - 7 \Rightarrow x = 2{,}5 \Rightarrow C(2{,}5; -2)$

Jaotame kujundi kohal $x = 2{,}5$ kaheks osaks, siis kujundi pindala $S = S_1 + S_2$.

Et $S_1 = \int_1^{2,5} (x^2 - 6x + 9 - (-4x + 8))dx = \int_1^{2,5} (x^2 - 2x + 1)dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right)\Big|_1^{\frac{5}{2}} =$

$= \frac{125}{24} - \frac{25}{4} + \frac{5}{2} - \frac{1}{3} + 1 - 1 = \frac{9}{8}$ ja

$$S_2 = \int_{2,5}^{4}\left[x^2 - 6x + 9 - (2x-7)\right]dx = \int_{2,5}^{4}(x^2 - 8x + 16)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 16x\right)\Big|_{\frac{5}{2}}^{4} =$$

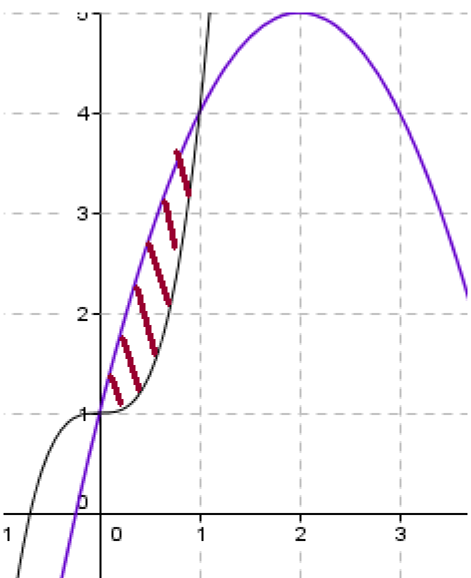
$$= \frac{64}{3} - 64 + 64 - \frac{125}{24} + 25 - 40 = 16\frac{1}{8} - 15 = 1\frac{1}{8}$$

Seega $S = \frac{9}{8} + \frac{9}{8} = \frac{18}{8} = 2\frac{1}{4}$

Vastus: selle kujundi pindala on 2,25 pindala ühikut.

Ülesanne 22

Leida joontega $y = 1 + 4x - x^2$ ja $y = 3x^3 + 1$ piiratud kujundi pindala



$$S = \int_0^1 [(1 + 4x - x^2) - (3x^3 + 1)]\, dx = \frac{937}{324}$$

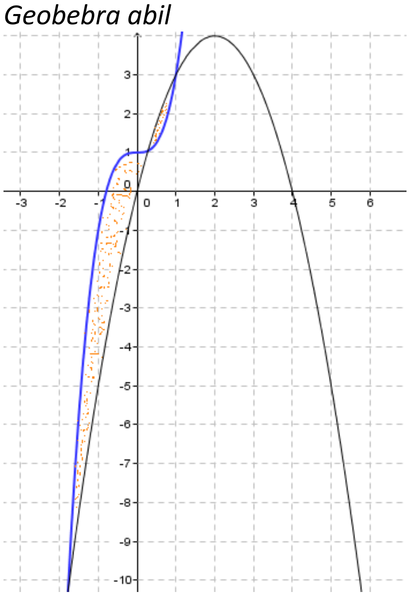
Integreerimisrajad on saadud süsteemi $\begin{cases} y = 1 + 4x - x^2 \\ y = 3x^3 + 1 \end{cases}$ lahendamise teel

Ülesanne 23

Leida kujunditega $y = 2x^3 + 1$ ja $y = -x^2 + 4x$ piiratud kujundi pindala.

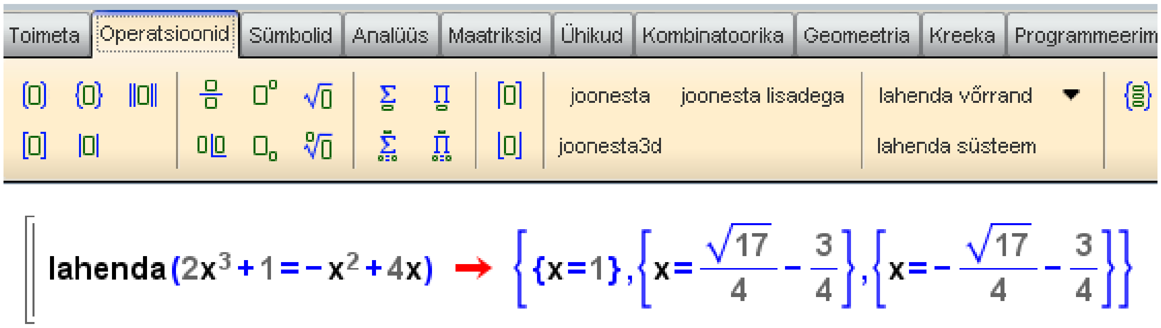
Lahedus WIRISe ja Geogebra abil

Geobebra abil

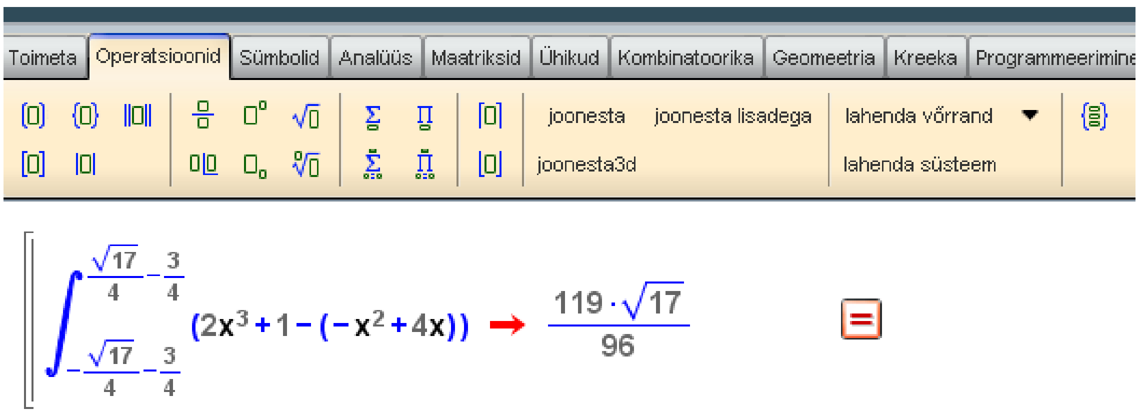


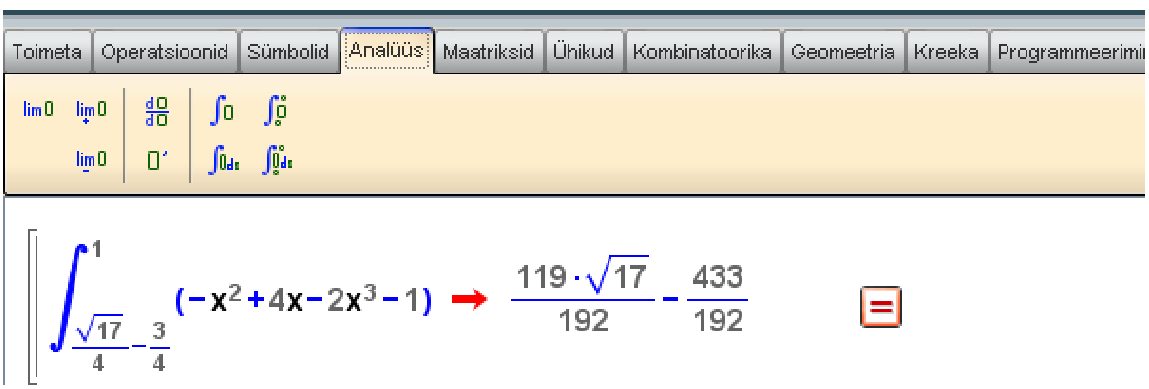
Wirise abil

- integreerimisrajad:



- integreerimine:





$$\frac{119\sqrt{17}}{96}+\frac{119\sqrt{17}-433}{192}=\frac{119\sqrt{17}}{64}-\frac{433}{192}$$

Vastus: pindala on $\frac{119\sqrt{17}}{64}-\frac{433}{192}$ üh^2

Näide 24

Leiame ellipsiga

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

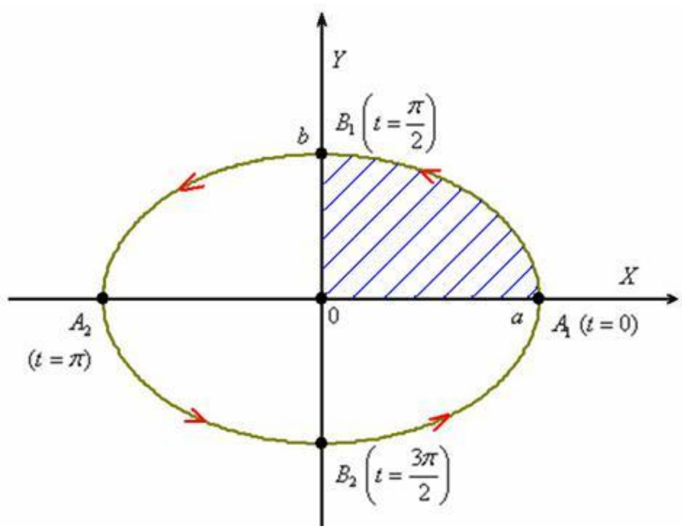
piiratud kujundi pindala.
Lahendus:

Tänu sümmeetriale piisab leida vaid esimeses veerandis paikneva osa pindala ja korrutada see neljaga.

See osa on määratud joontega $y = \frac{b\sqrt{a^2-x^2}}{a}$, y = 0, x = 0, x = a. Selle ellipsi esimeses veerandis paiknev kaar on parameetriliste võrranditega

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad (t \in [0; \pi/2])$$

Teeme valemis $S = \int_a^b f(x)dx$ muutuja vahetuse: $y = bsint$, $dx = -asint$, a −le vastab $t = \frac{\pi}{2}$, ning b-le $t = 0$ (sest t muutub kella osuti suunas, aga pindala arvutatakse x-telje positiivses suunas)



$$S = 4\int_{t_2}^{t_1} y(t)\cdot x'(t)dt = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\cdot(a\cos t)'dt = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\cdot(-a\sin t)dt = -4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 t dt =$$

$$= -4ab\cdot\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(1-\cos 2t)dt = -2ab\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = -2ab\left(0-0-\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\right) = -2ab\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi ab$$
.

Ülesanne 25

Leida joontega

$x(t) = \sqrt{t^3},\ y(t) = t+2$, $1 \le t \le 4$

piiratudkujundi pindala.

Lahendus:

Kasutame valemit

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot x'(t)dt$$
.

Leiame tuletise

$$x'(t) = (\sqrt{t^3})' = (t^{\frac{3}{2}})' = \frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{t}$$.

Seega:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t)dt = \int_1^4 (t+2) \cdot \frac{3}{2}\sqrt{t}dt = \frac{3}{2}\int_1^4 (t\sqrt{t} + 2\sqrt{t})dt = \frac{3}{2}\int_1^4 (t^{\frac{3}{2}} + 2t^{\frac{1}{2}})dt =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + 2 \cdot \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_1^4 = 3\left(\frac{1}{5}\sqrt{t^5} + \frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right)\Big|_1^4 = 3\left(\frac{1}{5}\sqrt{4^5} + \frac{2}{3}\sqrt{4^3} - \left(\frac{1}{5}\sqrt{1^5} + \frac{2}{3}\sqrt{1^3}\right)\right) =$$

$$= 3\left(\frac{32}{5} + \frac{16}{3} - \frac{1}{5} - \frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{31}{5} + \frac{14}{3}\right) = 3 \cdot \frac{163}{15} = \frac{163}{5}$$

Vastus: $S = \frac{163}{5}$ üh^2

Ülesanne 26

Leida joontega

$x(t) = 1 - t,\ y(t) = \sqrt{t}$, $1 \le t \le 4$

piiratud kujundi pindala.

Lahendus:

Integreerime

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t)dt = \int_1^4 \sqrt{t} \cdot (-1)dt = -\int_1^4 t^{\frac{1}{2}}dt = -\frac{2}{3}\left(t^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_1^4 = -\frac{2}{3}(8-1) = -\frac{14}{3}$$

Õige pindala vastus on “+”´märgiga. Otsearvutamise teel saadud negatiivne vastus, sest parameetri t kasvamisel x-väärtused kahanevad. Seega otse arvutamisel oli vaja integreerimisrajad ära vahetada (ehk integreerida 4.st kuni 1-ni) või integraali ette panna “-” märk

Ülesanne 27

Leida joontega

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{2}\cos t \\ y(t) = \sqrt{2}\sin t \end{cases}$$

$x = 1 \quad (x \ge 1)$

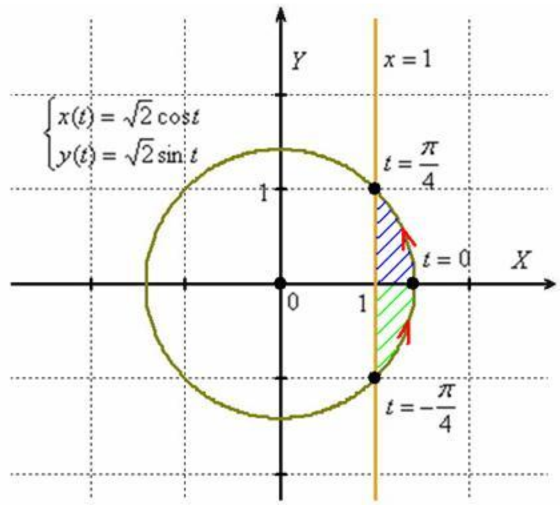
piiratud kujundi pindala

Lahendus:

Võrrandid

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{2}\cos t \\ y(t) = \sqrt{2}\sin t \end{cases}$$

määravad ringjoont keskpunktiga (0;0) ning raadiusega $\sqrt{2}$. Võrrandiga $x = 1$ on määratud y-teljega paralleelne sirge. Viirutatud ala pindala on otsitav (vt joonist)



Leiame parameetri t integreerimisrajad:

kui $x = 1$, siis võrrandist $\mathrm{x(t)} = \sqrt{2}cost$ saame

$1 = \sqrt{2}\cos t$

$$\cos t = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t = \pm\frac{\pi}{4}$$

Alumisele punktile vastab väärtus $t = -\frac{\pi}{4}$, ülemisele - $t = \frac{\pi}{4}$.

Kujund on sümmetriline x-telje suhtes, seega arvutame ülemise osa pindala (värvitud sinisega) ning korrutame see kahega.
Funktsioon

$x(t) = \sqrt{2}\cos t$

kahaneb piirkonnas $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, seega pindala arvutamisel pannakse integraali ette "-" märk

$$S = -2\int_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot x'(t)dt = -2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}\sin t\cdot(\sqrt{2}\cos t)'dt = -2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}\sin t\cdot(-\sqrt{2}\sin t)dt =$$

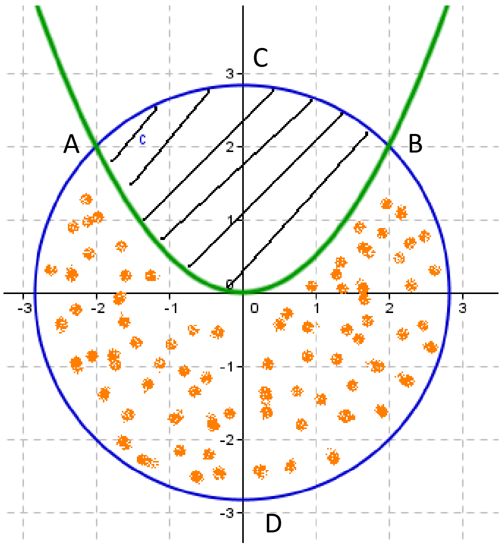
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t dt = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 2t)dt = 2\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} - (0-0)\right) = 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1$$

Vastus: $\boldsymbol{S = \frac{\pi - 2}{2}}$ üh^2 $\approx \mathbf{0,57}$ üh^2

Ülesanne 28

Leida ringjoone $x^2 + y^2 = 8$ ja parabooli $y = \frac{x^2}{2}$ lõikumisel tekkivate kujundite pindalad.

Lahendus:



Leiame kõigepealt ringjoone ja parabooli lõikepunktid. Selleks tuleb lahendada võrrandisüsteem $\begin{cases} x^2+y^2=8 \\ y=\dfrac{x^2}{2} \end{cases}$.

Teeme seda asendusvõttega, saame $x^2+\frac{x^4}{4}=8$ ehk $x^4+4x^2-32=0$, mis on x^2 suhtes ruutvõrrand. Tema lahenditest $x^2=4$ ja $x^2=-8$, on teine võõrlahend, sest alati on $x^2\geq 0$. Seega $x^2=4$, millest $x=\pm 2$. Niisiis on ringjoone ja parabooli lõikepunktideks $A=(-2, 2)$ ja $B=(2, 2)$ ning meil tuleb leida kujundite $AOBC$ ja $ADBO$ pindalad S_1 ja S_2 . Ringjoone ülemise poole võrrand on $y=\sqrt{8-x^2}$

Seega

$$S_1=\int_{-2}^{2}\left[\sqrt{8-x^2}-\frac{x^2}{2}\right]dx.$$

Kuna (vt allpool *Märkust 1*)

$$\int\sqrt{8-x^2}\,dx=4\arcsin\frac{x}{\sqrt{8}}+\frac{x}{2}\sqrt{8-x^2}+C,$$

Ning

$$\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C,\ \text{siis}$$

$$S_1=\left(4\arcsin\frac{x}{\sqrt{8}}+\frac{x}{2}\sqrt{8-x^2}\right)\Bigg|_{-2}^{2}-\frac{x^3}{6}\Bigg|_{-2}^{2}=4\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{2}\sqrt{8-4}-$$

$$-4\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{-2}{2}\sqrt{8-4}-\frac{8}{6}+\frac{-8}{6}=8\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+4-\frac{8}{3}=2\pi+\frac{4}{3}.$$

Kujundi $ADBO$ pindala S_2 erineb ringi pindalast S kujundi $AOBC$ pindala S_1 võrra. Ringi pindala S on leitav valemi $S=\pi r^2$ abil, kus $r^2=8$, seega $S=8\pi$ ning meid huvitav $S_2=8\pi-S_1=8\pi-2\pi-4/3=6\pi-4/3$.

<u>Vastus.</u> Kujundite pindalad on $2\pi+\frac{4}{3}$ ja $6\pi-\frac{4}{3}$.

Märkus 1

Leida integraal $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx (a > 0)$.

Juurest vabanemiseks teeme muutuja vahetuse $x = a \sin t$.
Siis $dx = (a \sin t)'\, dt = a \cos t\, dt$ ja asendamisel saame

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}\, \cos t dt = a \int \sqrt{a^2 \cos^2 t}\, \cos t dt = a^2 \int \cos^2 t dt.$$

Võrdust 2 $\cos^2$t = 1 + cos 2t kasutades leiame edasi

$$a^2 \int \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{a^2}{2} \int dt + \frac{a^2}{2} \int \cos 2t dt = \frac{a^2}{2} (t + C_1 + \int \cos 2t dt) =$$

$$= \frac{a^2}{2} (t + C_1 + \frac{1}{2} \sin 2t + C_2) = \frac{a^2}{2} (t + \frac{1}{2} \sin 2t) + C, \quad kus\ C = \frac{a^2}{2} (C_1 + C_2).$$

Seosest $\sin t = \dfrac{x}{a}$ tuleneb võrdus $t = \arcsin \dfrac{x}{a}$ ja seega valemi $\sin(\arcsin\ z) = z$ põhjal

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2 \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t} = 2 \sin(\arcsin \frac{x}{a}) \cdot \sqrt{1 - \left[\sin(\arcsin \frac{x}{a}) \right]^2} =$$

$$= 2 \cdot \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{2x}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Kokkuvõttes saame $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \dfrac{a^2}{2} \arcsin \dfrac{x}{a} + \dfrac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$