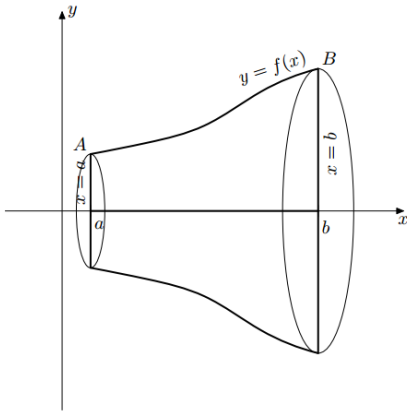


Pöördkeha ruumala

Pöördkeha teljeks on x -telg

Rahuldagu lõigul $[a; b]$ määratud ja pidev funktsioon $f(x)$ tingimust $f(x) \geq 0$. Olgu kõvertrapets (joonis) $abBA$ piiratud x -teljega, sirgetega $x = a$, $x = b$ ja funktsiooni $y = f(x)$ graafikuga. Paneme kõvertrapetsi pöörlema ümber x -telje.



Joonis Kõvertrapetsi pöörlemisel ümber x -telje tekkinud pöördkeha

Kohal x võetud lõike pindala olgu $S(x)$. Kui $S(x)$ on pidev funktsioon lõigul $[a; b]$, siis saab vaadeldava keha ruumala V arvutada määratud integraalina

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

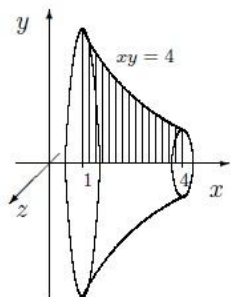
Kui moodustaja AB on integreeruva funktsiooni $y = f(x)$ kaar lõigul $[a; b]$, siis ristlõike on ring, mille raadius kohal x on $f(x)$. Seega kohal x võetud ristlõike pindala on $S(x) = \pi R^2 = \pi f^2(x)$, siis pöördkeha ruumala avaldub valemiga

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Näide 1

Leida keha ruumala, mis tekib joontega $xy = 4$; $y = 0$; $x = 1$, $x = 4$ piiratud kujundi pöörlemisel ümber x -telje.

Lahendus.

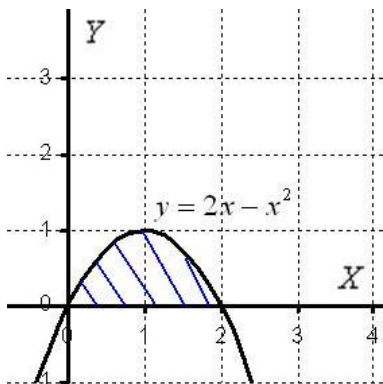


Et kasutada valemit vaadeldava keha ruumala leidmiseks, tuleb joone $xy = 4$ võrrand esitada kujul $y = 4/x$. Seega moodustame määratud integraali funktsioonist $y^2 = 16/x^2$ rajadega 1 ja 4:

$$V = \pi \int_1^4 \frac{16}{x^2} dx = 16\pi \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^4 = 12\pi.$$

Näide 2

Leida keha ruumala, mis tekib joontega $y = 2x - x^2$, $y = 0$ piiratud kujundi pöörlemisel ümber x-telje.



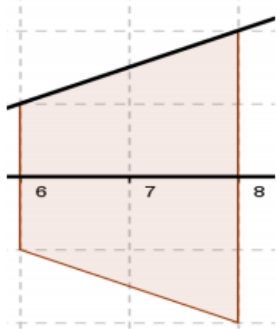
$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) dx =$$
$$= \pi \cdot \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \pi \cdot \left(\frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5} - 0 \right) = \frac{16\pi}{15}$$

Vastus: ruumala on $\frac{16\pi}{15} \approx 3,35\text{üh}^3$.

Näide 3

Arvutame pöördkeha ruumala, mis tekib, kui x-telje ümber pöörleb kujund, mida piiravad jooned

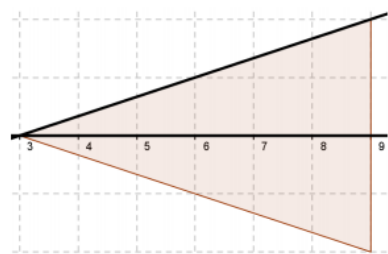
1) $y=0,5x-2$, $x=6$ ja $x=8$. Teeme joonise.



Tekkivaks pöördkehaks on tüvikoonus; arvutame ruumala integraali abil:

$$V = \pi \int_6^8 (0,5x - 2)^2 dx = \pi \int_6^8 (0,25x^2 - 2x + 4) dx = \pi \left[\frac{x^3}{12} - x^2 + 4x \right]_6^8 =$$
$$= 4\frac{2}{3}\pi \text{ ruumalaühikut.}$$

Näide 4



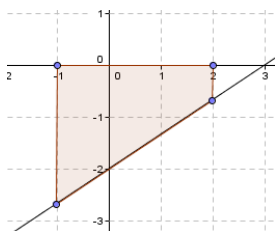
Arvutame pöördkeha ruumala, mis tekib, kui x-telje ümber pöörleb kujund, mida piiravad jooned $x - 3y - 3 = 0$, $x=3$ ja $x=9$.

$$V = \pi \int_3^9 \left(\frac{x}{3} - 1 \right)^2 dx = \pi \int_3^9 \left(\frac{x^2}{9} - \frac{2x}{3} + 1 \right) dx = \pi \left[\frac{x^3}{27} - \frac{x^2}{3} + x \right]_3^9 =$$
$$= \pi(27 - 27 + 9 - 1 + 3 - 3) = 8\pi$$

Näide 5

Leida keha ruumala, kui keha tekib joontega $2x - 3y + 6 = 0$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$ piiratud kujundi pöörlemisel ümber x-telje.

Lahendus: $y = \frac{2}{3}x - 2$



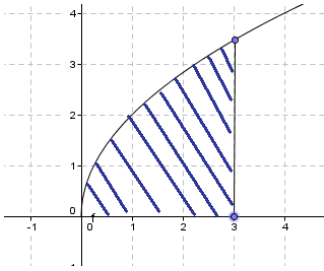
$$V = \pi \int_{-1}^2 \left(\frac{2}{3}x - 2 \right)^2 dx = \frac{28\pi}{3}$$

Vastus: $V = \frac{28\pi}{3} \text{üh}^3$

Näide 6

Leida keha ruumala, kui keha tekib joontega $y = 2\sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 3$ piiratud kujundi pöörlemisel ümber x-telje.

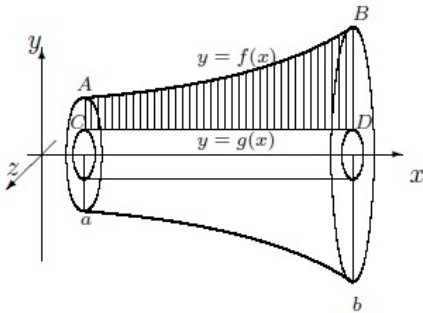
Lahendus.



$$V = \pi \int_0^3 (2\sqrt{x})^2 dx = 36\pi \text{ (üh}^3\text{)}$$

Juhul, kui pöörlev kõvertrapets on piiratud ülalt ja alt etteantud lõigul pidevate joontega

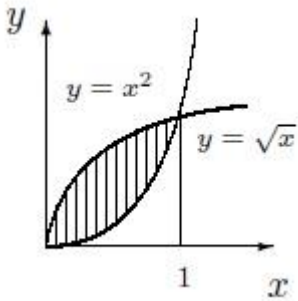
(kusjuures funktsioonid $y=f(x)$ ja $y=g(x)$ pidevad lõigul $[a;b]$, kusjuures $0 \leq g(x) \leq f(x)$) pöördkeha ruumala on



$$V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx$$

Näide 7

Leida keha ruumala, mis tekib joontega $y=x^2$, $y^2=x$ piiratud kujundi pöörlemisel ümber x-telje.



Joonistades pöörleva kujundi näeme, et joontel on kaks lõikepunkti.

Need punktid ($x=0$ ja $x=1$) saame, lahendades süsteemi

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = \sqrt{x}. \end{cases}$$

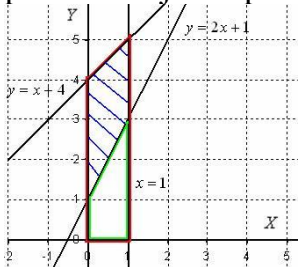
$$V = \pi \int_0^1 (x - x^4) dx = \left. \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}.$$

Näide 8

Leida keha ruumala, mis tekib joontega

$$y = 2x + 1, \quad y = x + 4, \quad x = 0, \quad x = 1$$

piiratud kujundi pöörlemisel ümber x-telje.

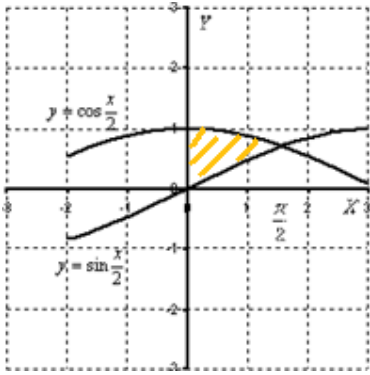


Otsitav ruumala on

$$\pi \int_0^1 (x+4)^2 dx - \pi \int_0^1 (2x+1)^2 dx = \frac{61\pi}{3} - \frac{13\pi}{3} = \frac{48\pi}{3} = 16\pi \text{ üh}^3$$

Näide 9

Leida keha ruumala, mis tekib joontega $y = \sin \frac{x}{2}$, $y = \cos \frac{x}{2}$, kus $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ piiratud kujundi pöörlemisel ümber x -telje.

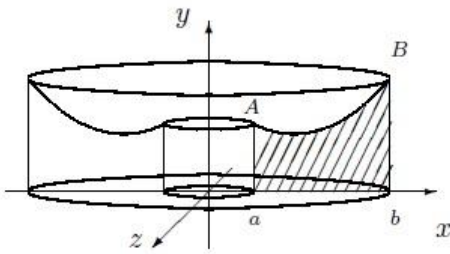


$$\pi \int_0^{\pi/2} \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) dx = \pi \int_0^{\pi/2} \cos x dx =$$

$$= \pi(\sin x) \Big|_0^{\pi/2} = \pi(1 - 0) = \pi$$

Vastus: ruumala on π üh³

Pöördkeha teljeks on y -telg



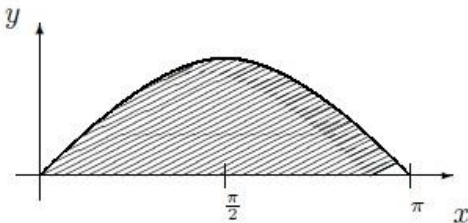
Olgu funktsioon $y = f(x)$ pidev lõigul $[a; b]$.

Vaatleme pöördkeha, mis tekib kõvertrapetsi $AabB$ pöörlemisel ümber y -telje. Pöördkeha ruumala V avaldub valemiga

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

Näide 10

Leida keha ruumala, mis tekib joontega $y = \sin x$, kus $x \in [0; \pi]$ ja $y = 0$ piiratud kujundi pöörlemisel ümber y -telje.



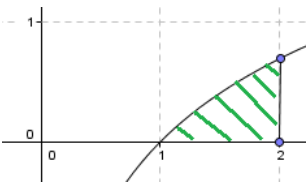
Et joontega $y = \sin x$ ja $y = 0$ piiratud kujund pöörleb ümber y -telje, siis tekkiva pöördkeha ruumala on

$$V = 2\pi \int_0^{\pi} x \sin x dx = 2\pi \left(-x \cos x + \sin x \right) \Big|_0^{\pi} = 2\pi^2.$$

Märkus: integraali arvutusel kasutatud ositi integreerimisel

Näide 11

Leida keha ruumala, mis tekib joontega $y = \ln x$, $x = 2$ ning $y=0$ piiratud kujundi pöörlemisel ümber y -telje.



$$V = 2\pi \int_1^2 x \ln x dx = 2\pi \left(\frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} \right) \Big|_1^2 = \frac{\pi(8 \ln 2 - 3)}{2} \text{ (üh}^3\text{)}$$

Märkus: integraali arvutusel kasutatud ositi integreerimisel